Neue Wege zur elementaren Mathematik

für Lehrer und Lehrerinnen die Freude an Ideen haben
und gerne etwas ausprobieren

Franz Gnädinger
Trailer für ein Buchprojekt
erstellt in Zusammenarbeit mit Steve Gnädinger

Inhalt

Kapitel 1
Was ist Mathematik?

(sehr anspruchsvolles erstes Kapitel, lässt sich in mehrere Lektionen gliedern)

Mathematik ist eine Form der Logik und hat einen Anteil an der Sprache.

Die menschliche Wortsprache könnte man als Dreieck darstellen. Die ‚Ecken' wären

unser Leben mit Bedürfnissen und Wünschen

die Mathematik als Logik des Bauens und Erhaltens,
basierend auf der Gleichung a = a

die Kunst als menschliches Mass in einer technischen Welt,
basierend auf Goethes Formel „Alles ist gleich, alles ungleich ..."

Ein Apfel ist ein Apfel – der eine Apfel mag klein sein, rot und süss, der andere grün, eher gross und säuerlich, und was wenn man ihn isst? Fällt ein Kern auf fruchtbaren Boden so kann er keimen, zu einem Baum heranwachsen und neue Früchte tragen ...

Zahlen sind anders als wirkliche Dinge wie etwa ein Apfel. Die Eins ist eine Eins ist eine Eins. Jede Eins ist genau gleich wie die andere. Jede Eins bleibt für immer eine Eins, ob die Sonne scheint, ob es regnet oder schneit, in Europa und Amerika, auf der Erde wie auf dem Mars, in der Milchstrasse oder einer fernen Galaxie ...

Fällt ein Krug zu Boden und zerbricht, so kann man ihn notdürftig zusammenkleben, doch es bleiben Spuren, Bruchstellen, vielleicht fehlt eine Ecke. Anders die Eins. Wir können sie in beliebig viele Teile zerlegen und aus den Stücken wieder vollständig zusammenfügen

1 = 1/1
1 = 1/2 plus 1/2
1 = 1/2 plus 1/4 plus 1/4
1 = 1/2 plus 1/4 plus 1/8 plus 1/8

und so weiter

1/2 plus 1/4 plus 1/8 plus 1/16 plus 1/32 plus 1/64 ... = 1

Dieselbe Zahlentreppe in einer vereinfachten Schreibweise (inspiriert von derjenigen der alten Ägypter, welche damals natürlich sehr jung waren)

1 = ’1
1 = ’2 ’2
1 = ’2 ’4 ’4
1 = ’2 ’4 ’8 ’8
1 = ’2 ’4 ’8 ’16 ’16
1 = ’2 ’4 ’8 ’16 ’32 ’32
1 = ’2 ’4 ’8 ’16 ’32 ’64 ’64 und so weiter

1 = ’2 ’4 ’8 ’16 ’32 ’64 ’128 ’256 ’512 ’1024 ...

’2 ’4 ’8 ’16 ’32 ’64 ’128 ’256 ’512 ’1024 ’2048 ’4096 ... = 1

Eine andere Zahlentreppe:

1 = 1/1
1 = 1/(1 x 2) plus 1/2
1 = 1/(1 x 2) plus 1/(2 x 3) plus 1/3

Die einfachere Schreibweise macht das Muster deutlich

1 = ’1
1 = ’1x2 ’2
1 = ’1x2 ’2x3 ’3
1 = ’1x2 ’2x3 ’3x4 ’4
1 = ’1x2 ’2x3 ’3x4 ’4x5 ’5
1 = ’1x2 ’2x3 ’3x4 ’4x5 ’5x6 ’6

und so weiter

1 = ’1
1 = ’2 ’2
1 = ’2 ’6 ’3
1 = ’2 ’6 ’12 ’4
1 = ’2 ’6 ’12 ’20 ’5
1 = ’2 ’6 ’12 ’20 ’30 ’6 und so weiter

’1x2 ’2x3 ’3x4 ’4x5 ’5x6 ’6x7 ’7x8 ’8x9 ’9x10 ’10x11 ’11x12 ... = 1

’2 ’6 ’12 ’20 ’30 ’42 ’56 ’72 ’90 ’110 ’132 ’156 ’182 ’210 ... = 1

Fortgeschrittene können die Reihe ‚halbieren’ indem sie die ersten beiden Brüche nehmen, die beiden nächsten weglassen, wieder zwei nehmen, zwei weglassen, und so weiter

’1x2 ’2x3 ’5x6 ’6x7 ’9x10 ’10x11 ’13x14 ’14x15 ’17x19 ’19x21 ...

Die Summe dieser unendlichen Reihe ist ein Viertel einer berühmten Zahl, nämlich der Zahl des Kreises die wir π oder pi nennen. Mit ein wenig ‚Zaubern’ gewinnt man die folgende Zahlentreppe für pi

8 mal ’1x3 ’16
8 mal ’1x3 ’5x7 ’32
8 mal ’1x3 ’5x7 ’9x11 ’48
8 mal ’1x3 ’5x7 ’9x11 ’13x15 ’64
8 mal ’1x3 ’5x7 ’9x11 ’13x15 ’17x19 ’80
8 mal ’1x3 ’5x7 ’9x11 ’13x15 ’17x19 ’21x23 ’96
8 mal ’1x3 ’5x7 ’9x11 ’13x15 ’17x19 ’21x23 ’25x27 ’112

’2 plus 8 mal ’3
’4 plus 8 mal ’3 ’35
’6 plus 8 mal ’3 ’35 ’99
’8 plus 8 mal ’3 ’35 ’99 ’195
’10 plus 8 mal ’3 ’35 ’99 ’195 ’323
’12 plus 8 mal ’3 ’35 ’99 ’195 ’323 ’483
’14 plus 8 mal ’3 ’35 ’99 ’195 ’323 ’483 ’675

Die letzte Reihe ergibt 3,14168... für pi = 3,14159..., schon ein sehr guter Wert.

Von einfachen Zahlen sind wir in wenigen Schritten zu einer wichtigen Zahl gekommen, die uns später noch beschäftigen wird. In der Mathematik hängt alles zusammen, man kommt oft sehr leicht vom Einfachen zum Komplexen, und das gerne mit Mustern. Wie kluge Köpfe sagten: Mathematik ist ein Spiel mit Mustern.

Wir haben die 1 in viele Teile zerlegt, aus ihnen die 1 wieder vollständig hergestellt, und dann aus Teilen der Zerlegung die berühmte Zahl pi gewonnen.

Mit Zahlen kann man solche Dinge anstellen. macht es Spass, in Zahlen Muster zu erkennen und daraus Formeln zu gewinnen. Aber wozu dienen diese Spielereien? Zahlen und andere mathematische Einheiten sind ideale Dinge einer technischen Welt. Schauen wir uns ein paar einfache Gleichungen an

b = b = b = b = b = b ...

Wenn alle Backsteine (b) gleich sind, dieselbe rechteckige Form und dieselbe Grösse haben, so kann die Mauer gelingen ...

b = b

... und wenn die Backsteine sich selber gleich bleiben, weder im Regen aufweichen noch in der Sommerhitze springen, so kann die Mauer lange stehen.

1 = 0,999...

Eine Tür (0.999...) soll in den Rahmen (1) passen. Ist sie zu gross, dann klemmt sie, oder ist sie zu klein so zieht es.

10 = 3 + 0.999... + 6 = 6 + 0.999... + 3 = 10

Geht man aus einem Zimmer so öffnet man die Tür (0.999...) aus der Wand (10) und schliesst sie wieder von der anderen Seite.

21 = 1 + 4 +7 + 9 = 21

Eine Maschine (21) will man zum Reinigen oder Reparieren in ihre Teile zerlegen (1, 4, 7, 9) und danach aus den Teilen wieder zusammenfügen, zur selben gut funktionierenden Maschine wie vorher (21).

Mathematische Einsichten haben etwas Magisches an sich, denn sie gelangen wie von selber zur einen oder anderen technischen Anwendung. Negative Zahlen waren einst verpönt, aber bewiesen ihren Nutzen in der Buchhaltung und machten auch sonst viele Rechnungen sehr viel einfacher. Noch mehr Mühe bereitete die Wurzel aus minus 1, die sogenannte imaginäre Zahl i, aber auch sie wurde sehr nützlich, denn ohne diese merkwürdige kleine Zahl liefe kein Radio, kein Fernseher und kein Computer ... Man hat sich oft gefragt, wieso auch die seltsamsten mathematischen Ideen über kurz oder lang eine praktische Anwendung finden. Wir haben den Grund dafür erkannt: Zahlen und andere mathematische Einheiten sind ideale Dinge der technischen Welt, sie entspringen der Logik des Bauens und Erhaltens.

Die Kunst wäre dann die andere Aufgabe: die vielen von uns geschaffenen Dinge ins Leben einpassen, ihnen ein menschliches Mass geben. Diese Aufgabe fordert ein anderes Denken, das Goethe sehr schön formulierte: „Alles ist gleich, alles ungleich ...“ Die einen Menschen sind besser im mathematischen Denken (a = a), die anderen im künstlerischen Denken (gleich ungleich), das eine Denken ist ebenso wichtig wie das andere, und beide ergänzen einander. Es sind gleichsam die beiden Pole der Logik. Wir brauchen sowohl die Stabilität der mathematischen Logik als auch die Flexibilität der künstlerischen Logik. Dies mag jene trösten, welche in den mathematischen Fächern Mühe haben

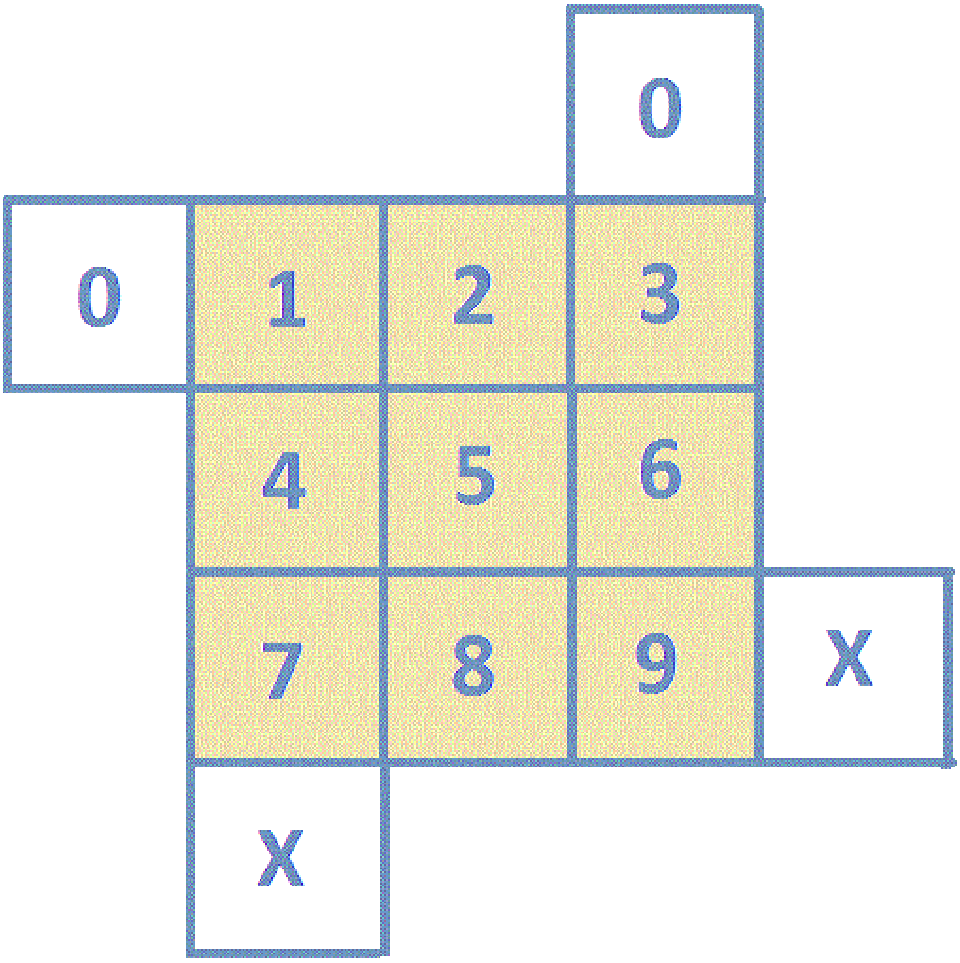
Das erste Kapitel war anspruchsvoll. Im nächsten Kapitel soll es dafür einfach zugehen. Wir bauen einen Computer – den allereinfachsten Computer, aber er funktioniert, man kann wirklich damit rechnen, und im Spiel die Besonderheiten der mathematischen Denkweise erfahren.

Kapitel 2
Der allereinfachste Computer

Man* zeichne ein grosses Quadrat auf einen Bogen Papier oder einen Stoff, gliedere es in drei mal drei kleine Quadrate, und füge vier kleine Quadrate an, so wie auf der Zeichnung (nächste Seite; Farben – hier ein Goldton – sind nicht erforderlich). Die neun Felder des grossen Quadrates beschrifte man mit den Zahlen 1 2 3 4 5 6 7 8 9, die oben angefügten Felder je mit O für Null, die beiden unten angefügten Felder je mit X für Römisch Zehn. (* Meine sprachwissenschaftlichen Studien führten mich zur Einsicht dass ‚man' keine männliche Form ist, sondern von MAN für die rechte Hand herkommt, ich werde also ‚man' brauchen und keine Doppelform wie mann/frau.) Dann nehme man kleine Kieselsteine und lege sie auf die Zahlen. Beispielsweise einen auf die Zahl 3 und einen auf die Zahl 8. Was ist 3 plus 8 ? Das kann man ausrechnen, indem man die Kieselsteinchen bewegt, und zwar nach einer sehr einfachen Regel

jede Bewegung erfordert eine Gegenbewegung
ein Kieselsteinchen nach rechts, das andere nach links
ein Kieselsteinchen nach oben, das andere nach unten

Man bewege die Steinchen so lange, bis möglichst alle aus dem grossen (hier goldenen) Quadrat entfernt sind, auf die Felder O (Null) und X (Römisch Zehn).



Der allereinfachste Computer, ein Brettspiel für die Primarschule

3 und 8
8 nach rechts auf 9 – – 3 nach links auf 2
9 nach rechts auf X oder Zehn – – 2 nach links auf 1

Jetzt liegt nur noch ein Steinchen im grossen Quadrat, nämlich auf der 1, das andere im einem Feld X oder Römisch Zehn. Damit haben wir 10 plus 1 oder 11. Die Summe von 3 und 8 ergibt 11.

Beginnen Sie mit einfachen Additionen, und wenn Sie das Prinzip verstanden haben, können Sie anspruchsvolle Summen berechnen.

Eine Schülerin mit einer schweren Rechenschwäche (aber dafür einer engelhaften Singstimme) erwies sich als besonders flink im Umgang mit dem ‚Computer'. Kopfrechnen war ihr unmöglich. Was ergibt Zwölf weniger Eins? Zwölf ... weniger Eins ...... ergibt .... Eins ?? Doch mit dem Spielfeld, das sie auf einen Papierbogen in Plakatgrösse zeichnete, konnte sie schwierige Aufgaben im Handumdrehen lösen. Zum Beispiel diese: was ist die Summe der Quadratzahlen von 1 bis 9 ? Ein Steinchen auf 1, zwei auf 2, drei auf 3, und so weiter, schliesslich neun auf 9. Im Nu hatte sie insgesamt 28 Steinchen auf den Feldern X macht 280, und eines auf dem Feld 5, macht insgesamt 285.

Wie schon im ersten Kapitel gesagt ist in der Mathematik alles verbunden. Von der Reihe der Quadratzahlen kommt man zur Summe der inversen Zahlen 1 '4 '9 '16 '25 '36 '49 '64 '81 ..., eine berühmte Frage die Leonhard Euler zur sogenannten Zeta-Funktion führte welche für das grösste Problem der heutigen Mathematik verantwortlich zeichnet, nämlich die Riemann-Vermutung bezüglich der Verteilung der Primzahlen 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 ...

Wieder zum obigen ‚Computer'. Mit ein wenig Erfindungsgabe können Sie allerlei interessante Probleme formulieren, beispielsweise eine 3 subtrahieren indem Sie die Steinchen so bewegen, dass eines auf das Feld 3 zu liegen kommt, worauf Sie es einfach wegnehmen.

Versuchen Sie den ‚Computer' zu überlisten, aber halten Sie sich bitte immer an die Regel Bewegung Gegenbewegung.

Oder Sie können Muster auslegen, zum Beispiel das gerade Kreuz der Zahl 25 (Steinchen auf 2 4 5 6 8) und es in das schräge Kreuz (1 3 5 7 9) überführen. Die Muster zeigen, dass Rechnen im Prinzip ein Umformen ist das man solange betreibt bis man ein Ergebnis hat, welches in ein vorgegebenes System passt, meist in unser Zehnersystem, X X 5 oder 10 10 5 oder 20 5 oder 25.

Weshalb funktioniert der ‚Computer'? Wenn Sie das herausgefunden haben, können Sie das Spielfeld erweitern und auch negative Zahlen einführen, die vor einigen hundert Jahren selbst grossen Mathematikern Kopfzerbrechen bereiteten.

So einfach der ‚Computer' ist, kann man doch in spielerischer Weise elementare Prinzipien der Mathematik erfahren.

Ein Nachwort bezüglich Rechenschwäche oder Dyskalkulie. Rechnen hat zwei Anteile, exaktes Rechnen (2 plus 3 gibt 5) und Schätzen (diese Menge ist grösser als jene). Mit der obigen Schülerin habe ich vor allem die zweite Fähigkeit geübt.

Kapitel 3
Wir berechnen das Quadrat

Zu den ältesten mathematischen Objekten gehören eingeritzte Liniengruppen auf Tierknochen, zum Beispiel derjenige von Ishango, Zaire, Afrika, 25'000 Jahre alt. Eine Gruppe von Strichen sieht ungefähr so aus

||||||| ||||| ||||| |||||||||| 7 5 5 10 Striche

Sie könnten eine Formel für das Quadrat enthalten

Misst ein Quadrat 5 mal 5 Schritte,
so messen die beiden gleich langen Diagonalen je 7 Schritte,
aber wenn die Seite eines grösseren Quadrates 7 Schritte misst,
so misst seine Diagonale zweimal 5 oder 10 Schritte

Diese Formel könnte viele tausend Jahre gegolten haben. Dann, vielleicht in Ägypten, würde sich ein ‚Seilstrecker' oder Landvermesser gefragt haben: Wenn ich ein Quadrat abstecke das eine Seitenlänge von 5 plus 7 gleich 12 Einheiten hat, wie lang ist dann seine Diagonale? Vielleicht 7 plus 10 gleich 17 Einheiten?

Misst die Seite eines Quadrates 5 plus 7 gleich 12 Einheiten,
so misst die Diagonale 7 plus 10 gleich 17 Einheiten,
aber wenn die Seite 7 plus 10 gleich 17 Einheiten misst,
so misst die Diagonale zweimal 12 gleich 24 Einheiten

Erfreulicherweise bewährte sich die neue Formel und führte nach und nach zu einer Zahlsäule (hier in der schrägen Form weil so das Prinzip leicht verstanden werden kann)

```
1       1       2
    2       3       4
        5       7      10
           12      17      24
               29      41      58
                   70      99     140
                     169     239     338
                         408     577     816
                             985    1393    ....
                                ....    ....    ....
```

Der Baumeister der Djoser-Pyramide in Saqqara verwendete die Zahlen 12 - 17 - 24 und derjenige der Cheops-Pyramide die Zahlen 70 - 99 - 140 während die Mesopotamier zwei Werte für das Verhältnis der Diagonale zur Seite des Quadrates brauchten, 17/12 oder 1;25 im sexagesimalen Zahlsystem (basierend auf der Basis 60 anstelle der 10 im dezimalen System) und den ausgezeichneten Wert 1;24,51,10 notiert auf dem berühmten Tontäfelchen YBC 7289 von 1'600 BC. Wie erklärt sich dieser Wert? Man teile 1393 durch 985 im sexagesimalen System und erhält 1;24,51,10,3,2,... Man lasse die kleinen Zahlen ...3,2,... weg und behalte 1;24,51,10 für 1,4142129... anstelle von 1,4142135...

Die obige Zahlsäule hat ein genaues Äquivalent im Kettenbruch [1;2,2,2,2,2,2,...] für die Wurzel 2.

Zahlsäulen haben den Vorteil von vielen Werten – man kann die Zahlen auswählen, die am besten in eine vorgegebene Rechnung passen. Ein Beispiel. Die Seite eines Quadrates messe 1 Elle 3 Handbreiten 1 Fingerbreite oder 28 plus 12 plus 1 gleich 41 Fingerbreiten, die Diagonale misst demnach 58 Fingerbreiten oder 56 plus 2 Fingerbreiten oder 2 Ellen 2 Fingerbreiten (eine ägyptische Elle hat 28 Fingerbreiten, und eine Handbreite 4 Fingerbreiten).

Die Seite eines Quadrates messe 63 Ellen. Wie lang ist die Diagonale? Die Zahl 63 findet sich nicht in der Säule, aber wir können sie gliedern in Elemente der Säule

```
Seite   63 gleich 41 plus 17 plus 5
                  58 plus 24 plus 7 gleich 89   Diagonale
```

Wenn die Seite 63 Ellen misst, so die Diagonale 89 Ellen. Der genaue Wert ist 89.095... Ellen. Der Fehler beträgt knapp 5 Zentimeter auf eine Strecke von 46,65 Metern. Möchte man ein besseres Ergebnis, so verwandle man die 63 Ellen in 441 Handbreiten und gehe auf dieselbe Weise vor.

```
Seite   441 gleich 408 plus 29 plus 2 plus 2
                   577 plus 41 plus 3 plus 3 gleich 624   D
```

Der genaue Wert ist 623.668... Handbreiten oder 89.095 Ellen, der Fehler gut zweieinhalb Zentimeter auf eine Strecke von 46,65 Metern. Will man es noch genauer, so verwandle man die 63 Ellen oder 441Handbreiten in 1764 Fingerbreiten

```
S   1764  gleich  985  577  169  29  2  2
                 1393  816  239  41  3  3  gleich  2495   D
```

Die genaue Länge wäre 2494,672... Fingerbreiten. Der Fehler ist nur noch gut ein halber Zentimeter auf die ganze Strecke von 46,65 Metern oder etwa ein Zehntel von einem Promille. (Masse des Alten Reiches: Königselle 52,36 cm, Handbreite 7.48 cm, Fingerbreite 1,87 cm; Masse des Neuen Reiches: Königselle 52.5 cm, Handbreite 7.5 cm, Fingerbreite 1.875 cm)

Die Zahlsäulen sind fehlertolerant. Auch diese Säule approximiert die Wurzel 2

```
1        1        2
    2        3        4
        6        7        12        (Fehler 6)
            13       19       26
               32       45       64
                    77      109      154
                       186      263      372
                           449      635      898
```

635 geteilt durch 449 ergibt 1,41425... anstelle von 1,41421... Auch die grösseren Zahlen der fehlerhaften Säule streben die Wurzel 2 an. Das heisst übrigens, dass man die Zahlsäule mit einem beliebigen Zahlenpaar beginnen kann, zum Beispiel 1 – 3 oder 2 – 9 oder ... Probieren Sie es aus.

```
2        9        4
   11       13       22
       24       35       48
           59       83      118
              142      201      284
                  343      485      ...
```

Kapitel 4
Würfel, gleichseitiges Dreieck, Sechseck

Eine analoge Zahlsäule dient der Berechnung des Würfels, des gleichseitigen Dreiecks und Sechsecks

```
1        1        3
    2        4        6
    1        2        3
        3        5        9
            8       14       24
            4        7       12
               11       19       33
                   30       52       90
                   15       26       45
                       41       71      123
                          112      194      336
                           56       97      168
               (Archimedes)       153      265      459
                                      418      724     1254
                                      209      362      627
                                          571      989     1713
                                             1560     2702     ....
                           (Archimedes)          780     1351     ....
```

Die Kantenlänge eines Würfels messe 41 Einheiten. Wie lang sind die Diagonalen der sechs quadratischen Flächen? 58 Einheiten gemäss der ersten Zahlsäule. Wie lang ist die Diagonale des Volumens? 71 Einheiten gemäss der obigen Zahlsäule. Man fragte sich, wo Archimedes die Werte 265/153 und 1351/780 für die Wurzel 3 hernahm. Sie finden diese Zahlen in der obigen schrägen Säule.

Wie lassen sich die Zahlen auf das gleichseitige Dreieck und Sechseck anwenden?

Kapitel 5

Doppelquadrat und goldene Folgen

Eine weitere Zahlsäule dient der Berechnung des Doppelquadrates und strebt die Wurzel 5 an

```
1       1       5
    2       6      10
    1       3       5
        4       8      20
        2       4      10
        1       2       5
            3       7      15
               10      22      50
                5      11      25
                   16      36      80
                    8      18      40
                    4       9      20
                       13      29      65
                           42      94     210
                           21      47     105
                               68     152     340
                               34      76     170
                               17      38      85
                                   55     123     275
                                      178     398     890
                                       89     199     445
                                          288     644    1440
                                          144     322     720
                                           72     161     360
```

Misst ein Doppelquadrat 72 mal 144 Ellen, so die Diagonale 161 Ellen, mit einem sehr kleinen Fehler. Diese Zahlsäule enthält zwei goldene Folgen, die sogenannte Fibonacci-Folge (F) und die sogenannte Lucas-Folge (L)

```
L  1  3  4  7  11  18  29  47  76  123  199  322  ...
F  1  1  2  3   5   8  13  21  34   55   89  144  ...
```

Kapitel 6
Verdoppelung eines Volumens

Vor langer Zeit waren die Bewohner einer griechischen Stadt von einer Epidemie bedroht, konnten aber die Gefahr abwenden, indem sie eine mathematische Aufgabe lösten: ein Gott werde ihnen helfen, wenn sie das Volumen seines Altars verdoppelten.

Würde man die Länge jeder Kante verdoppeln, so würde man das Volumen auf das Achtfache erhöhen, denn 2 mal 2 mal 2 gibt 8. Wie kann man vorgehen? Indem man eine weitere Zahlsäule aufzieht

```
  1       1       1       2
      2       2       3       4
          4       5       7       8
              9      12      15      18
              3       4       5       6


  3       4       5       6
      7       9      11      14
         16      20      25      32
             36      45      57      72
             12      15      19      36


 12      15      19      24
     27      34      43      54
         61      77      97     122
            138     174     219     276
             46      58      73      92


 46      58      73      92
    104     131     165     208
        235     296     373     470
            531     669     843    1062
            177     223     281     354


177     223     281     354
    400     504     635     800
```

Man verlängere die Kanten um den Faktor 504/400 oder 63/50 und das Volumen verdoppelt sich

63/50 mal 63/50 mal 63/50 gibt 2.000376 oder praktisch 2

Kapitel 7
Re hat viele Namen

Gibt es ein ähnliches Verfahren für die Berechnung des Kreises? Ja, Zahlfolgen welche aus einem schwachen und einem mittelmässigen Wert gute Werte macht, und aus einem mittelmässigen und einem guten Wert ausgezeichnete Werte.

```
4/1  (plus 3/1)  7/2  10/3  13/4  16/5  19/6  22/7  25/8

3/1  (plus 22/7)  25/8  47/15  69/22  91/29  113/36  135/43  157/50
179/57  201/64  223/71  245/78  267/85  289/92  311/99  333/106
355/113  377/120  ...   1521/484  =  39x39 / 22x22

9/3  (plus 19/6)  28/9  47/15  ...  256/81  =  4x4x4x4 / 3x3x3x3

6/2  (plus 22/7)  28/9  50/16  72/23  ...  600/191
```

Der Durchmesser eines Kreises betrage 1 ägyptische Königselle oder 7 Handbreiten. Wie lang ist der Umfang? 22 Handbreiten oder 3 Ellen 1 Handbreite.

Ein Quadrat messe 10 mal 10 Ellen oder 70 mal 70 Handbreiten oder 280 mal 280 Fingerbreiten. Wie lang ist der Umfang des umschreibenden Kreises? Der Durchmesser des Kreises wird von der Diagonale des Quadrates vorgegeben. Die Seite des Quadrates misst 10 Ellen oder 70 Handbreiten. Die Diagonale beträgt gemäss der ersten Zahlsäule 99 Handbreiten. Nimmt man diese als Durchmesser eines Kreises, so beträgt der Umfang gemäss der zweiten Zahlfolge für pi 311 Handbreiten oder 44 Ellen 3 Handbreiten. Die exakte Zahl wäre 311,0018... Handbreiten oder 44 Ellen 3,0018... Handbreiten. Der Fehler ist winzig.

Der Umfang einer Säule messe 600 Fingerbreiten. Was ist der Durchmesser? 191 Fingerbreiten.

Der ägyptische Gott Re manifestierte sich in der Sonne. Seine Hieroglyphe war ein kleiner Kreis mit einem Mittelpunkt. Er hatte hundert Namen doch niemand kannte seinen wirklichen Namen. Die obigen und weitere Zahlfolgen bieten viele Werte an, welche die geheimnisvolle Zahl umgeben ohne sie wirklich zu benennen.

Einige der obigen Werte lassen sich recht einfach in ägyptische Stammbrüche umformen

22/7 gleich 3 ’7

157/50 gleich 3 ’10 ’25

311/99 gleich 3 ’9 ’33

377/120 gleich 3 ’10 ’24

Kapitel 8
Den Kreis berechnen

Der grosse französische Ägyptologe Jean Lauer fand in der sogenannten Königskammer der Cheops-Pyramide das ‚Heilige Dreieck' 3-4-5 in der Form 15-20-25 Königs-Ellen: Diagonale der kurzen Wand 15 Ellen, Länge der Kammer 20 Ellen, Diagonale des Volumens 25 Ellen.

Das ‚Heilige Dreieck' 3-4-5 erlaubt eine systematische Berechnung des Kreises. Man denke sich ein Quadrat von 10 mal 10 Königs-Ellen oder 70 mal 70 Handbreiten oder 280 mal 280 Fingerbreiten. Die Diagonale misst praktisch 99 Fingerbreiten (siehe oben). Man ergänze das Quadrat zu einem Gitter von 10 mal 10 kleineren Quadraten, jedes 1 mal 1 Elle. Dann zeichne man einen Kreis vom Radius 5 Ellen oder 35 Handbreiten oder 140 Fingerbreiten um die Mitte des grossen Quadrates. Der Umfang des grossen Kreises, dem grossen Quadrat eingeschrieben, passiert mathematisch genau 12 Gitterpunkte, nämlich die vier Endpunkte der Achsen, sowie 8 Gitterpunkte im Inneren des grossen Quadrates welche vom ‚Heiligen Dreieck' 3-4-5 definiert werden. Die 12 Punkte markieren 8 grössere und 4 kleinere Kreisbögen. Die grösseren messen je praktisch 90 Fingerbreiten, die kürzeren je praktisch 40 Fingerbreiten. Der Umfang beträgt praktisch 8 mal 90 plus 4 mal 40 oder 720 plus 160 oder 880 Fingerbreiten oder 220 Handbreiten. Wenn man diese durch die 280 Fingerbreiten oder 70 Handbreiten des Durchmessers teilt, so erhält man 880/280 oder 22/7 für pi.

```
. . . . . d . . . . .
. . e . . . . . c . .
. f . . . . . . . b .
. . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . .
g . . . . + . . . . a
. . . . . . . . . . .
. . . . . . . . . . .
. h . . . . . . . l .
. . i . . . . . k . .
. . . . . j . . . . .
```

Verbindet man die Kreispunkte a b c d e f g h I j k l a mit Geraden, so haben ihre Längen zwei Werte, Wurzel 2 für die vier kurzen Stücke, und Wurzel 2 mal Wurzel 5 für die acht langen Stücke. Diese beiden Wurzeln können wir mit zwei der obigen Zahlsäulen approximieren. Bedenken wir dass die Bögen etwas länger sind als die Geraden, so wählen wir Zahlen für die Wurzeln die etwas grösser sind als die eigentlichen Werte, 10/7 für die Wurzel 2, und 9/4 für die Wurzel 5

10/7 mal 10/7 gleich 100/49 etwas mehr als 2

9/4 mal 9/4 gleich 81/16 etwas mehr als 5

Der Umfang misst dann in Fingerbreiten F

4 mal 28 mal 10/7 F plus 8 mal 28 mal 10/7 mal 9/4 F
gleich 160 F plus 880 F gleich 880 Fingerbreiten oder 220 Handbreiten

Teilen wir die 880 Fingerbreiten oder 220 Handbreiten durch die 280 Fingerbreiten oder 70 Handbreiten des Durchmessers, so bekommen wir 880/280 oder 220/70 oder 22/7 oder 3 ’7 für pi.

Dieselbe Zahl findet sich in der einfachen Folge

4/1 (plus 3/1) 7/2 10/3 13/4 16/5 19/6 22/7

Erweitert man den Radius von 5 auf 25 kleinere Einheiten, so kommt ein weiteres Tripel hinzu, welches acht weitere Punkte auf der Kreisumfang definiert: 7-24-25. Der Umfang des Polygons von 12 Seiten beträgt 60 mal Wurzel 2 plus 32 mal Wurzel 5. Wenn man 17/12 und nocheinmal 9/4 für die beiden Wurzeln verwendet, so erhält man 157 und für pi 157/50 aus einer der obigen pi-Folgen

3/1 (plus 22/7) 25/8 47/15 ... 157/50 ... 311/99 ... 377/120

Erweitert man den Radius des Kreises von 5 auf 25 dann 125 dann 625 ... immer kleinere Einheiten des immer feineren Gitters 25 mal 25 dann 125 mal 125 dann 625 mal 625 ... immer kleinere Einheiten, so kommen weitere 12 und 12 und 12 ... Punkte des Umfangs auf Gitterpunkte zu liegen, welche von einer Tripelfolge definiert werden

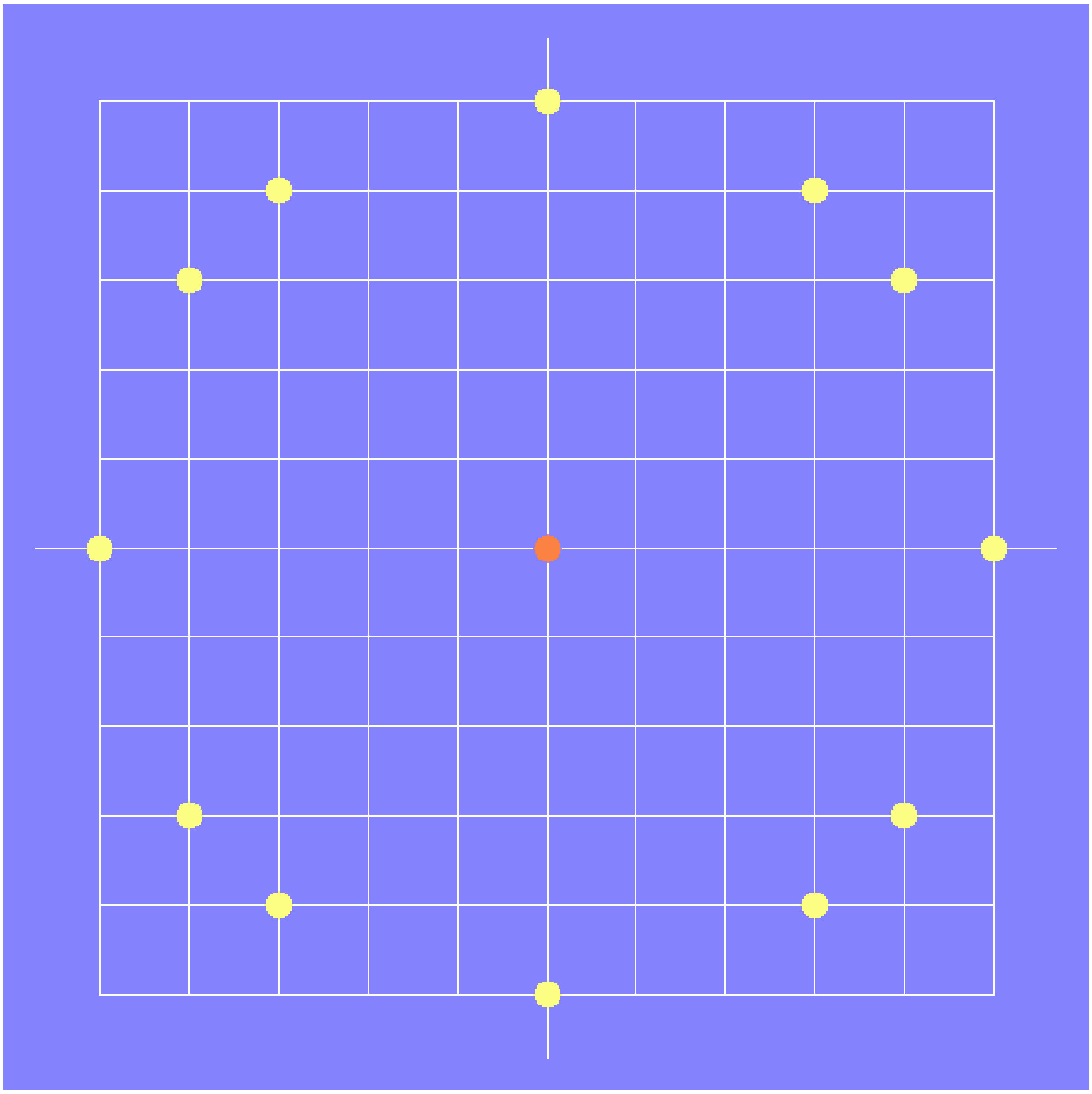
```
3-4-5  15-20-25  75-100-125  275-500-625  ...
          7-24-25  35-120-125  245-600-625  ...
                   44-117-125  220-585-625  ...
                               336-527-625  ...
                                            ...
```

Kennt man ein Tripel a-b-c und möchte man das nächste Tripel finden, so verwende man diesen linearen Algorithmus

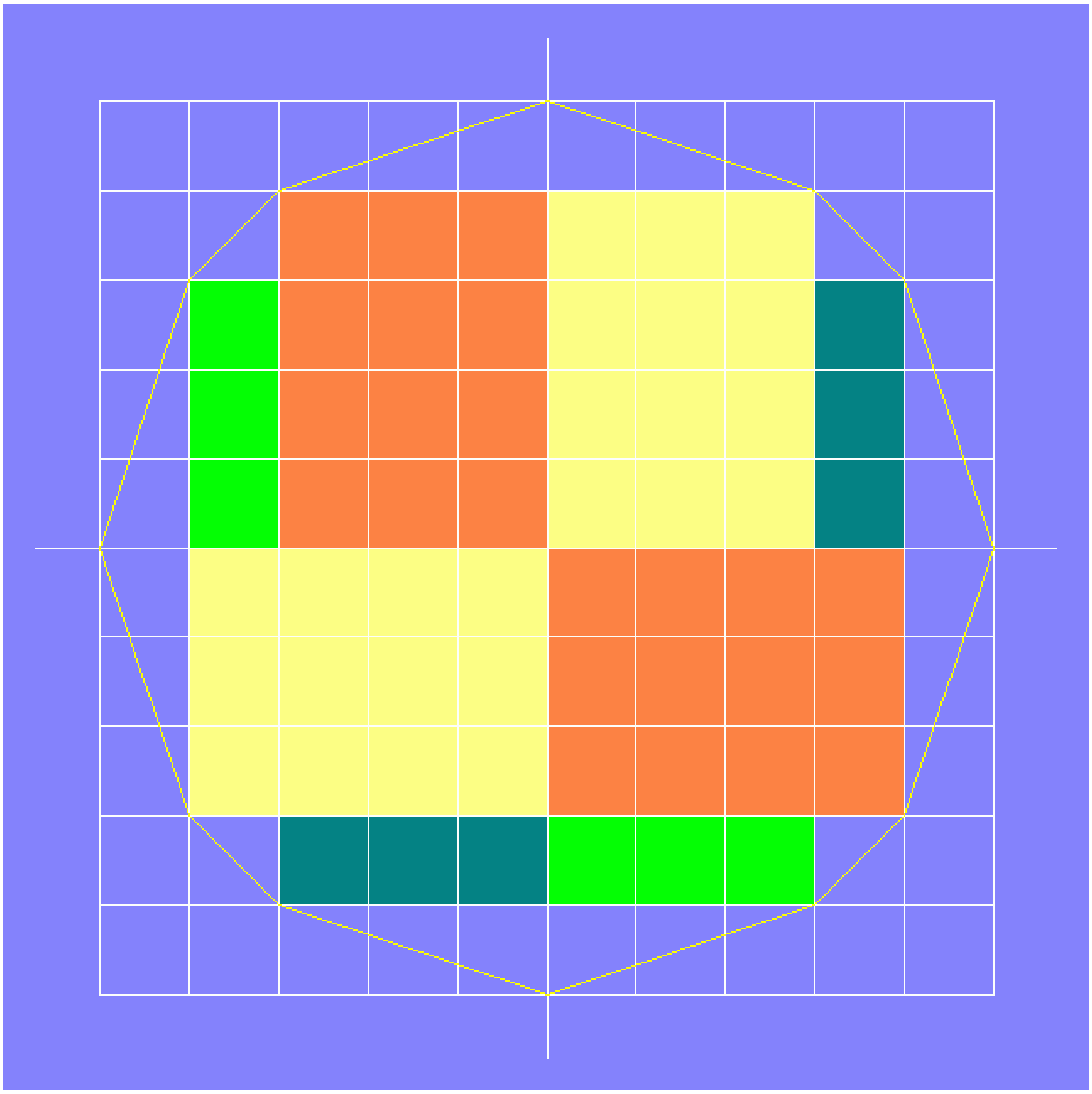
+-3a +-4b +-4a +-3b 5c

und verwende die positiven Ergebnisse der ersten beiden Terme die weder durch 5 teilbar sind noch Null ergeben.

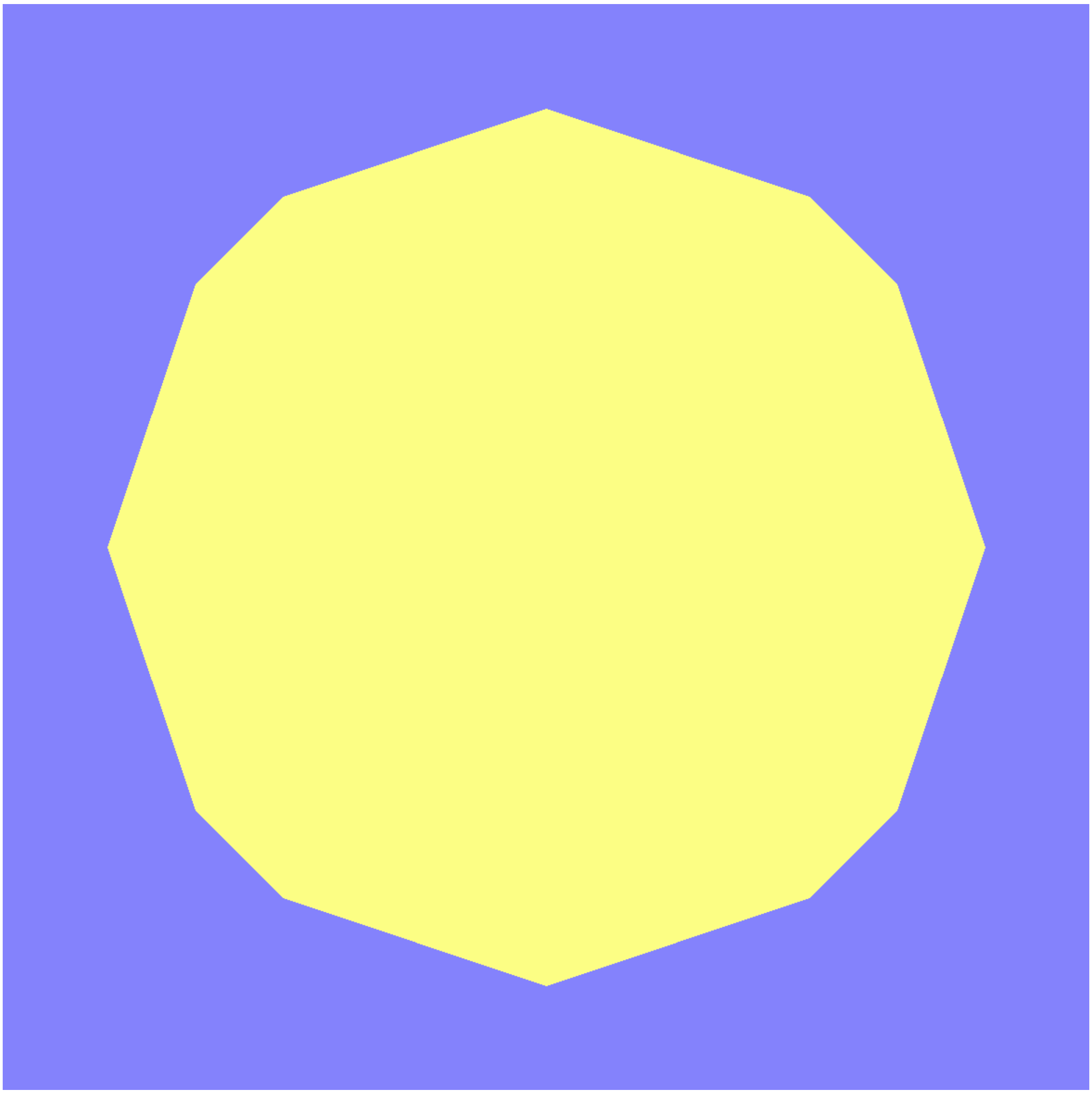
Die Polygone haben nacheinander 12 20 28 36 ... Seiten deren Längen allein mit den Zahlsäulen der Wurzel 2 und der Wurzel 5 berechnet werden können. Das heisst: wir haben ein vollständiges und systematisches Verfahren für die Kreisberechnung das sehr viel einfacher ist als dasjenige von Archimedes und meiner Meinung nach der Schule des Imhotep und vor allem dem Baumeister des Cheops, möglicherweise Hemon zugeschrieben werden kann. Bilder der vier ersten langsam sich rundenden Polygone



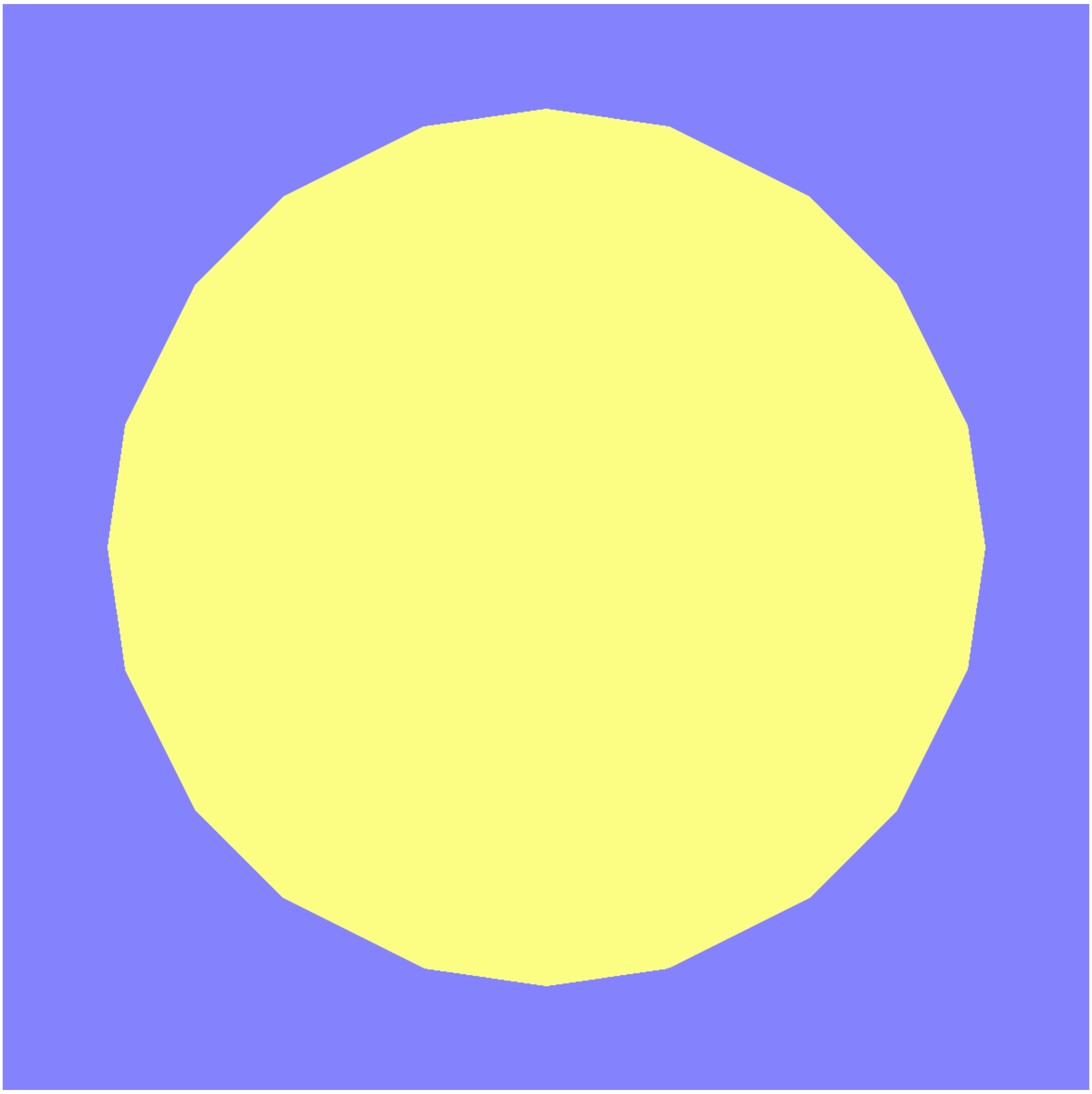
Gitter 10 mal 10, 12 Kreispunkte, 8 davon definiert vom ‚Heiligen Dreieck' 3-4-5



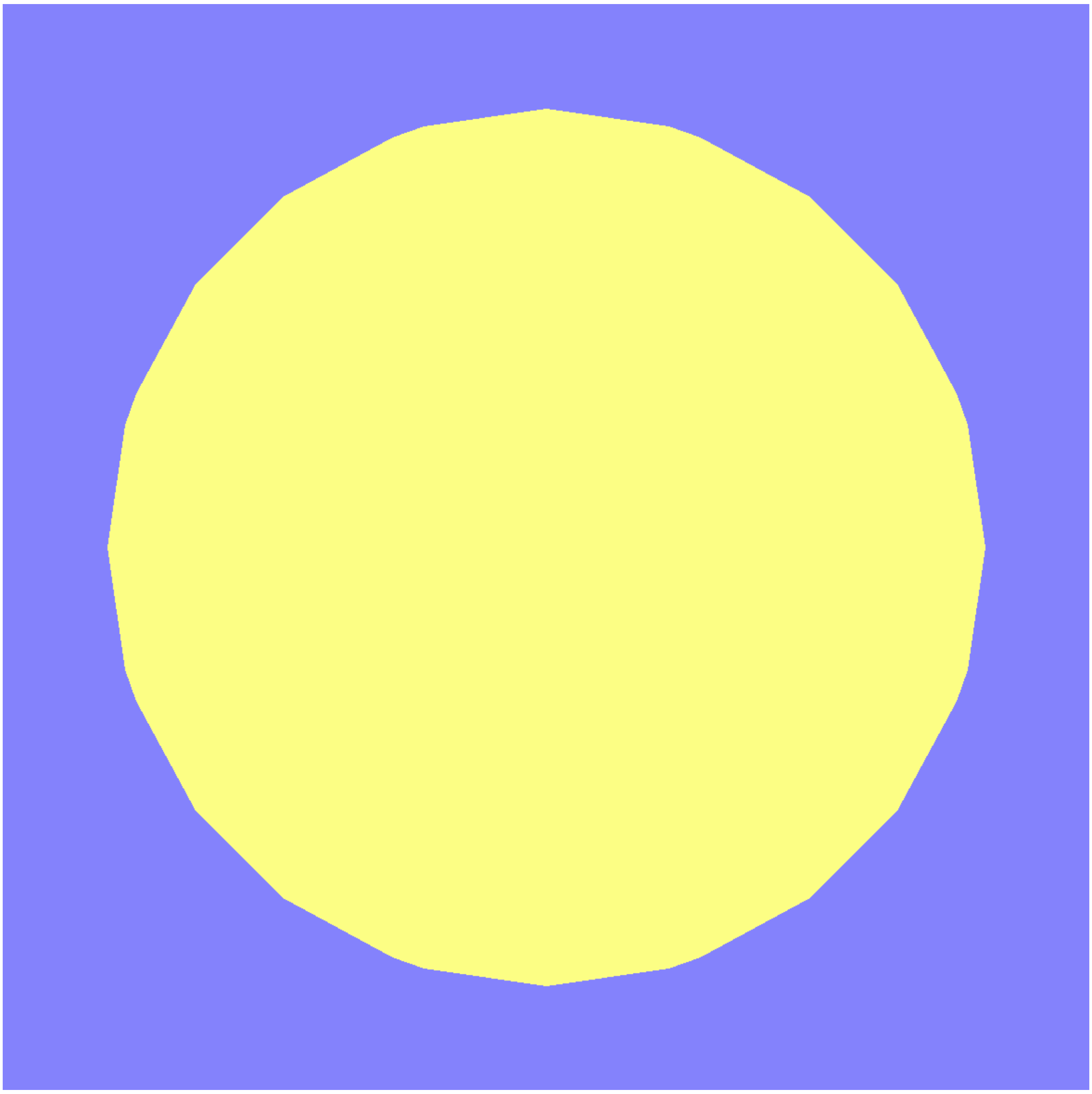
Dasselbe Gitter, Polygon definiert vom Dreieck 3 mal 4 Diagonale 5



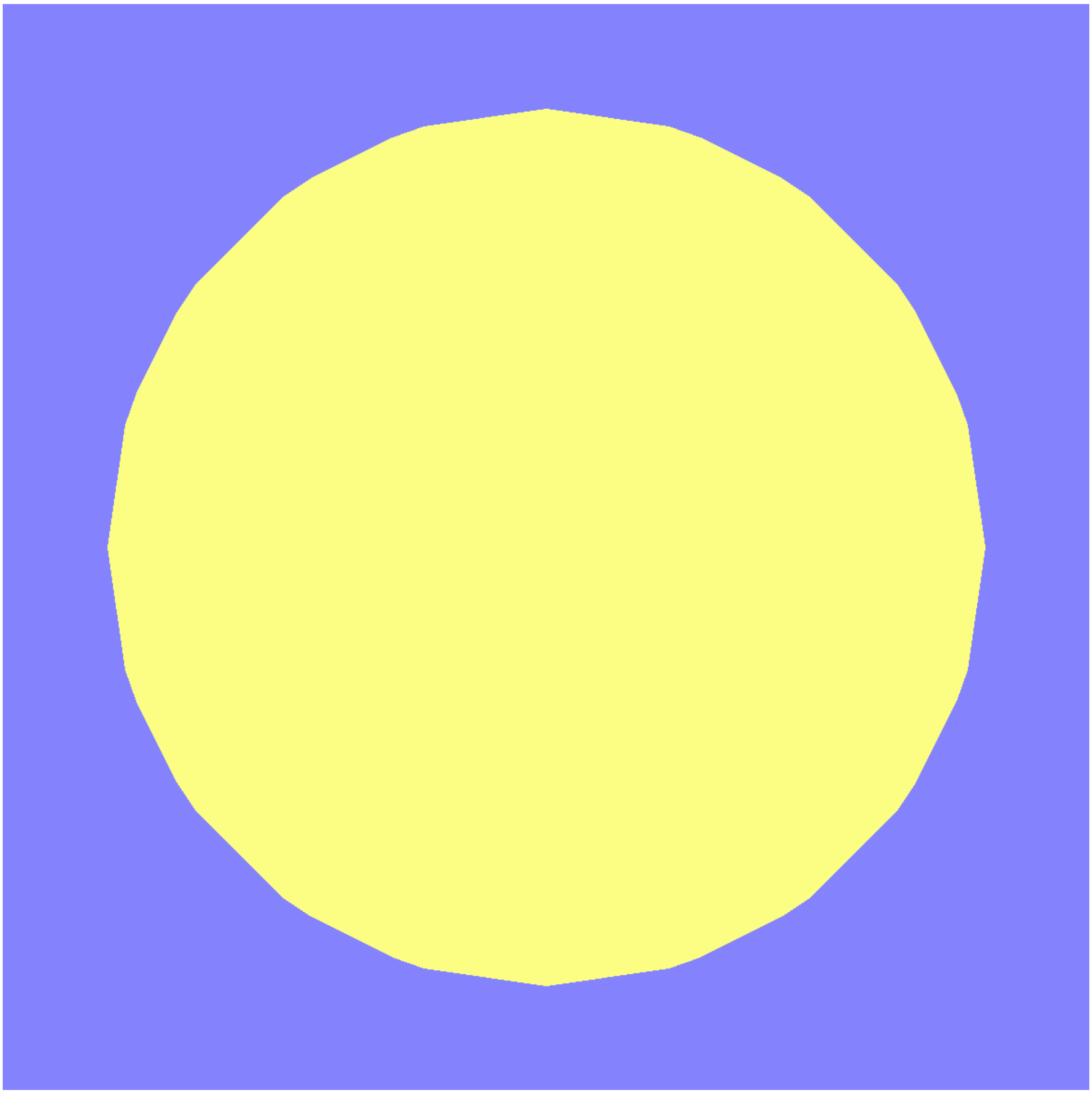
Erstes Kreispolygon, Tripel 3-4-5



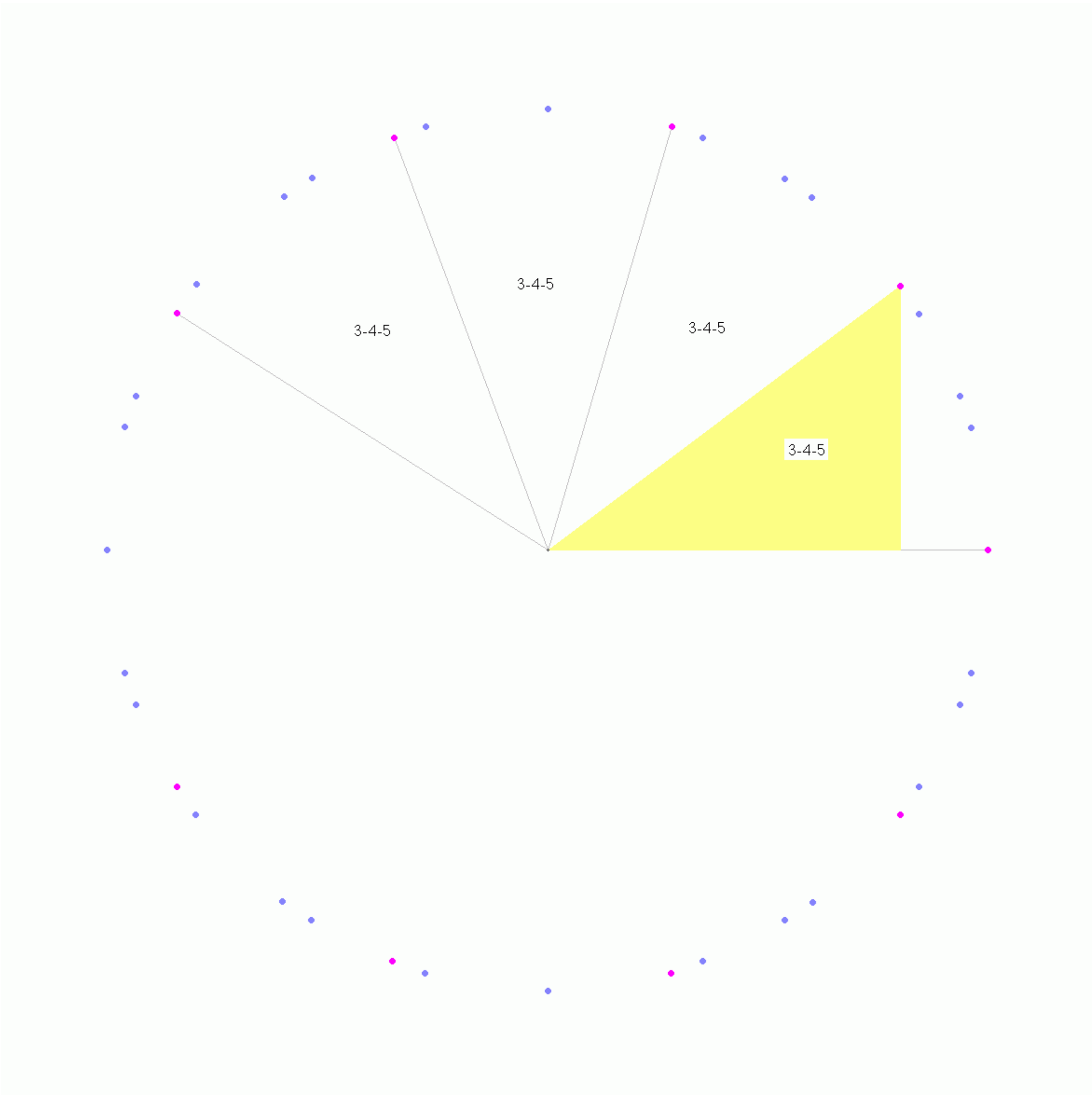
Zweites Kreispolygon, Tripel 3-4-5 oder 15-20-25 und 7-24-25



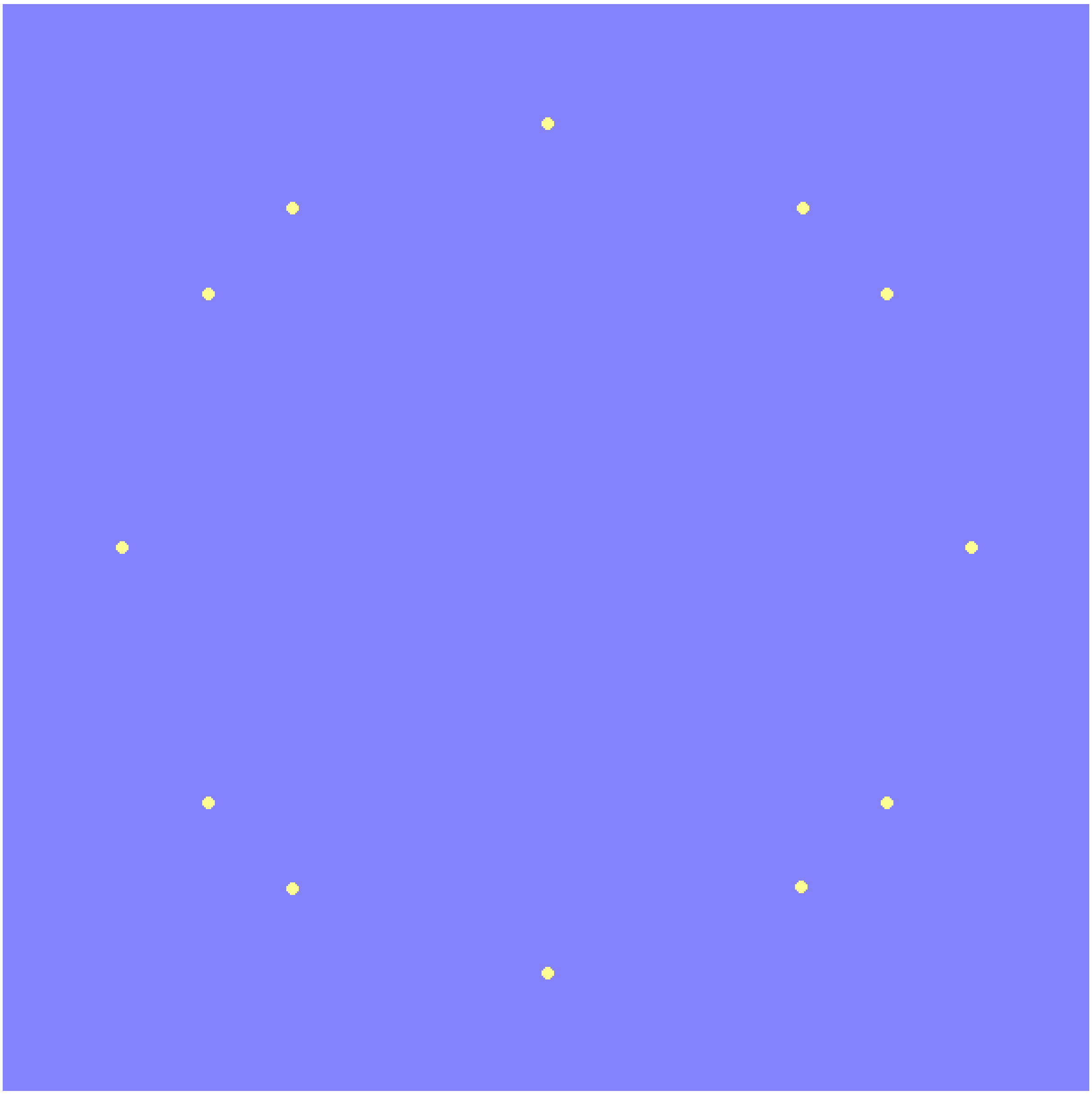
Drittes Kreispolygon, Tripel 3-4-5 oder 75-100-125 und 7-24-25 oder 35-120-125 und 44-117-125



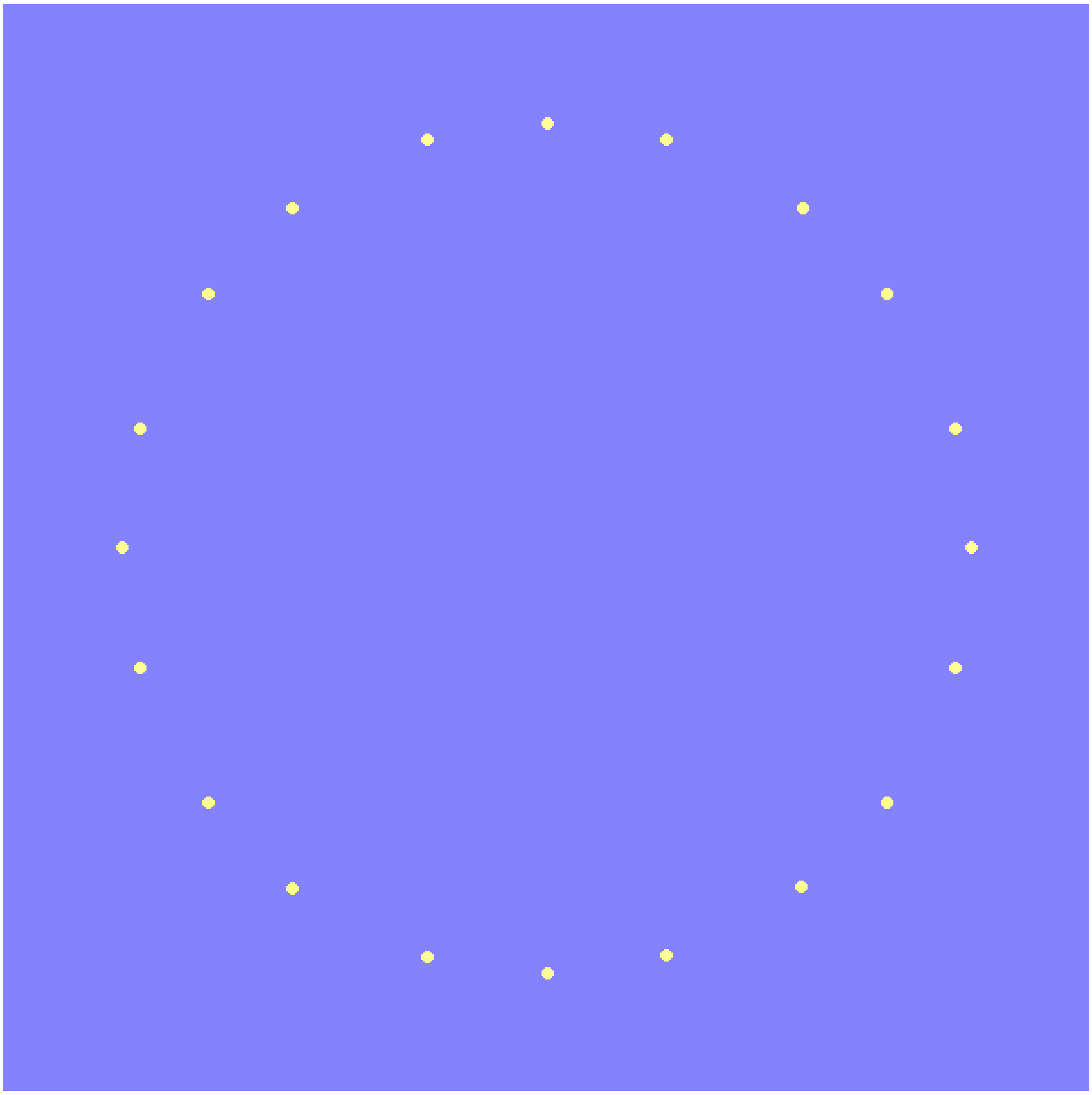
Viertes Kreispolygon, Tripel 3-4-5 oder 375-500-625 und 7-24-25 oder 175-600-625
und 44-117-125 oder220-585-625 und 336-527-625



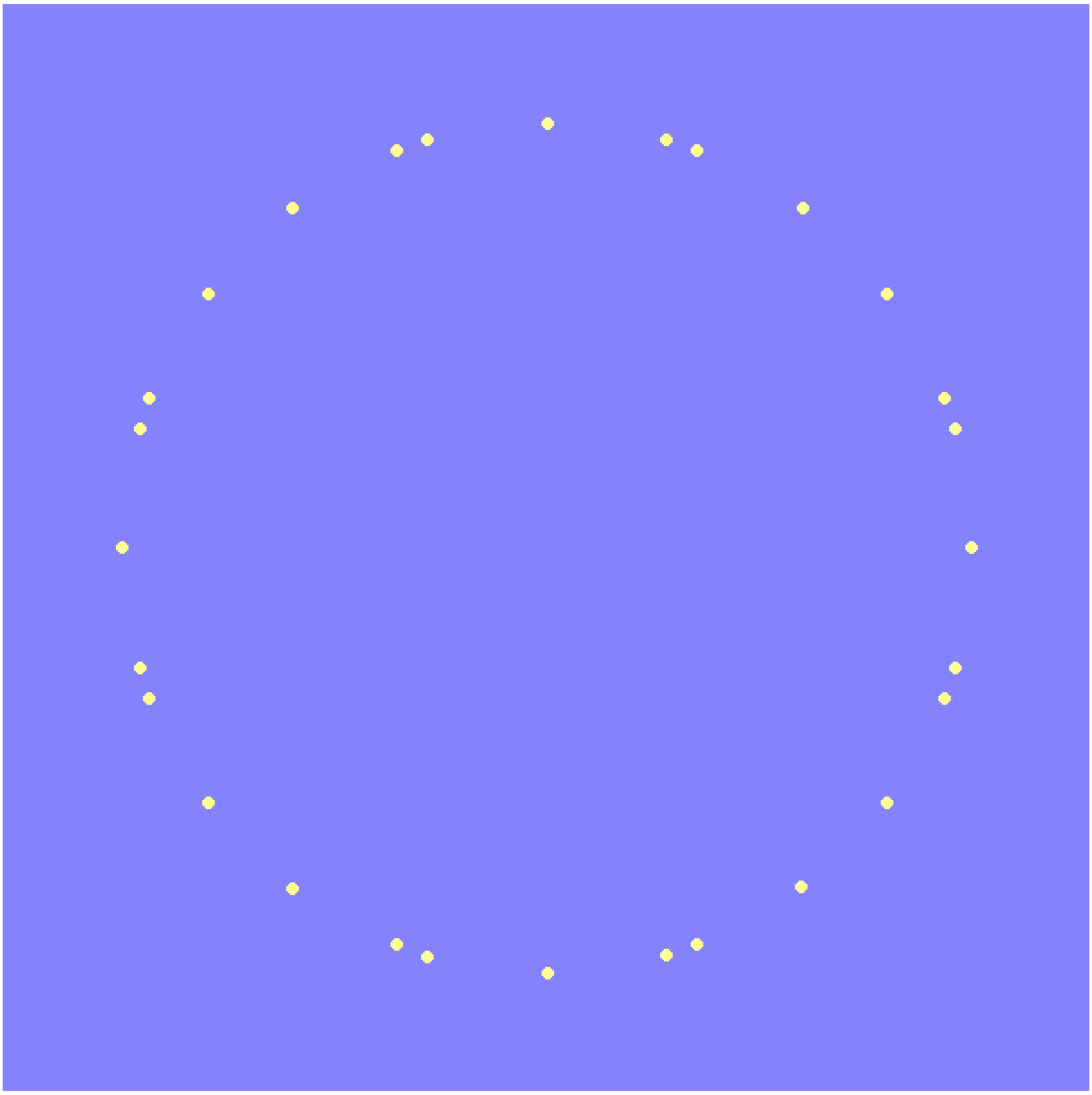
Ecken der Polygonfolge, erzeugt von einem sich drehenden ‚Heiligen Dreieck' 3-4-5



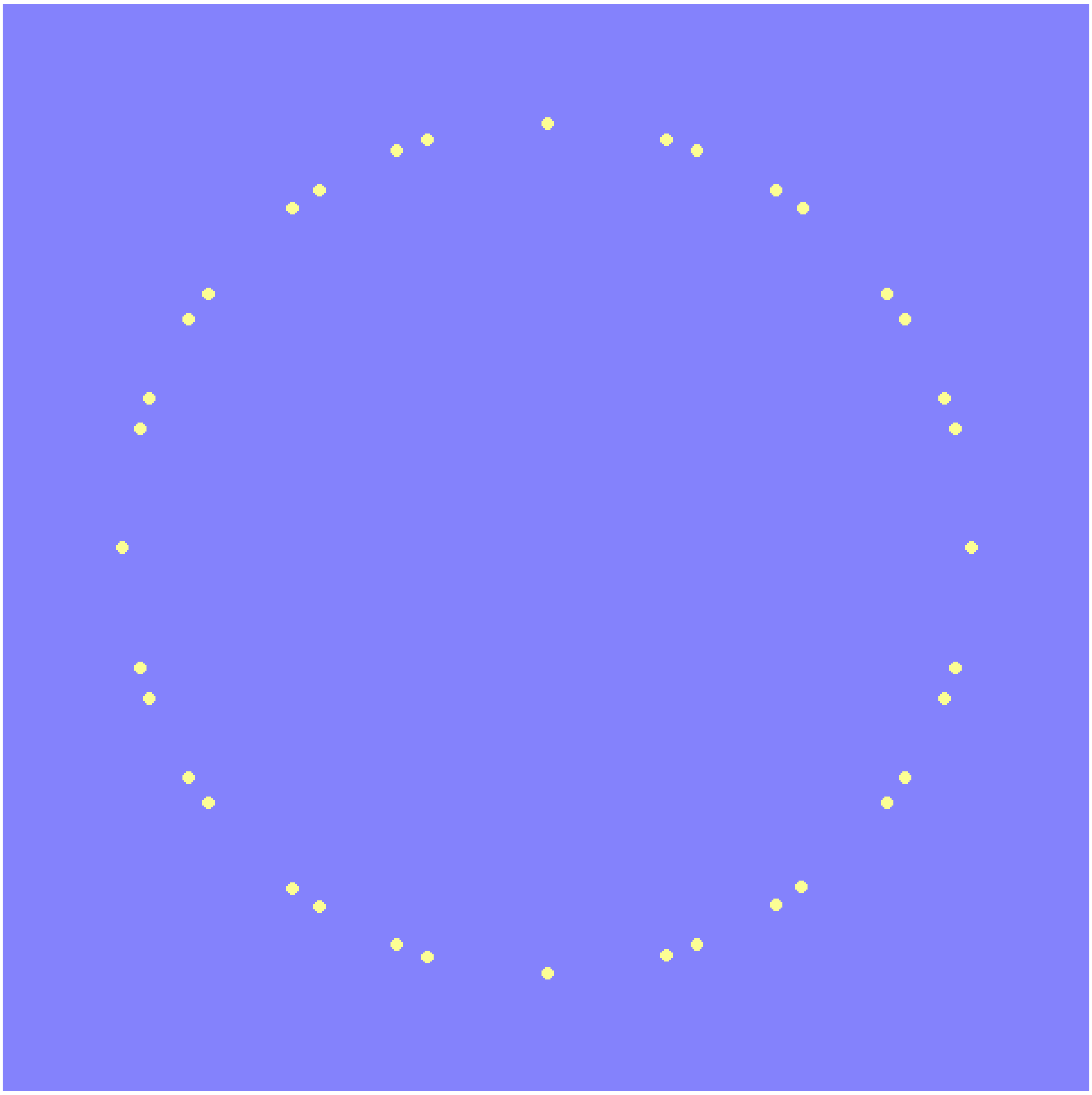
12 Ecken des ersten Kreispolygons



20 Ecken des zweiten Kreispolygons



28 Ecken des dritten Kreispolygons



36 Ecken des vierten Kreispolygons

Kapitel 9
Verborgene Kammern?

Die ägyptischen Pyramiden symbolisieren den Ur-Hügel, der aus dem Wasser aufstieg, sich öffnete den Gott Re der Sonne und die Göttin Nut des Himmels freigaben ...

Die Basis der Roten Pyramide von Snofru, Vater des Cheops, mass 420 mal 420 Ellen, die Höhe 200 Ellen, die schräge Höhe einer Seitenfläche genau 290 Ellen gemäss dem Tripel 21-20-29. Man denke sich die Pyramide hohl, darin ein grosse Kugel, welche auf dem Boden steht und alle vier Seitenflächen berührt. Ihr Radius beträgt genau 84 Ellen. Die Mitte der imaginären Kugel befände sich über der Mitte der Basis, in einer Höhe von 84 Königs-Ellen oder praktisch 44 Metern. Die imaginäre Kugel wäre die Sonne des Gottes Re und des wiedergeborenen Königs welche aus dem Ur-Hügel der Pyramide emporstiege ... Sollte sich eine geheime Kammer in dieser Pyramide verbergen, so wäre es die Sonnenkammer, 44 Meter über der Mitte der Basis.

Cheops, der Sohn des Snofru, Cousin des Hemon, liess eine noch grössere Pyramide bauen, die nach ihm benannte Grosse Pyramide oder Cheops-Pyramide. Ihre Basis mass 440 mal 440 Ellen, ihre Höhe 280 Ellen. Diese Pyramide kombiniert zwei ideale Pyramiden. In Fall der ‚goldenen Pyramide' gemäss dem antiken Historiker Herodot wäre die Fläche einer schrägen Seite gleich gross wie das Quadrat der Pramidenhöhe ist die schräge Fläche gleich dem Quadrat der Pyramidenhöhe, das wäre die goldene Pyramide gemäss dem Historiker Herodot, während im Fall der ‚Pi-ramide' die Fläche eines Kreises vom Durchmesser der Pyramidenhöhe der Fläche des Pyramiden-Querschnittes entspräche. Die beiden Pyramiden liegen mathematisch sehr sehr nahe beisammen. Die imaginäre Form in der goldenen Pyramide wäre eine grosse Halbkugel vom Radius 173 Ellen, gemäss der goldenen Folge 9 16 25 41 66 107 173 280, Symbol der Himmelsgöttin Nut welche sich über die Erde beugte und das Sonnenkind austrug, während der imaginäre grosse Kreis der Pi-ramide die Sonne darstellen würde, welche der widergeborene König als Re verlässt um an den Himmel aufzusteigen ... Sollte sich eine geheime Kammer in der Cheops-Pyramide verbergen, so wäre sie im Zenit der grossen imaginären Halbkugel zu finden, 173 Ellen oder 90,6 Meter über der Mitte der Basis, und wäre die Sonnenkammer worin das Sonnenkind heranwächst ...

Kapitel 10
Zwei Aufgaben im Rhind Papyrus

Der berühmte mathematische Papyrus Rhind ist voller Wunder, wie Ahmes in seinem Vorwort verspricht: alle Geheimnisse ... Dem Augenschein nach sind die Rechnungen vergleichsweise simpel und haben viele Mathematiker enttäuscht. Nur haben sie die zweite Ebene übersehen. Anfänger lernen mit Stammbrüchen arbeiten, während Fortgeschrittene mit anspruchsvollen Aufgaben der zweiten Ebene konfrontiert werden.

Der Papyrus stammt aus der Zeit um 1'600 BC. Er wurde von einem Ahmose oder Ahmes geschrieben, als Kopie einer verlorenen Rolle von etwa 1'800 BC.

In einem der Probleme teilt Ahmes 2 durch 1 ’3 ’4 und bekommt 1 ’6 ’12 ’114 ’228. Anfänger lernen an dieser Aufgabe mit Reihen von Stammbrüchen umgehen, während Fortgeschrittene eine nahrhafte Aufgabe gestellt bekommen: Stellt euch einen Kornspeicher in der Form eines stehenden Quaders vor. Die innere Höhe messe zwei Einheiten, die innere Länge 1 ’3 ’4 Einheiten, die innere Weite 1 ’6 ’12 ’114 ’226 Einheiten. Wie lang ist die Diagonale des Hohlraums?

Unmöglich zu beantworten? Nein, im Gegenteil, sehr einfach! Die Diagonale misst genau

1 ’3 ’4 plus 1 ’6 ’12 ’114 ’228 Einheiten

1 1 plus ’3 ’6 plus ’4 ’12 plus ’114 ’228 Einheiten

2 ’2 ’3 ’76 Einheiten

Daraus kann man ein Theorem herleiten:

2 geteilt durch A gibt B

ein Quader messe 2 mal A mal B Einheiten

Höhe 2 Länge A Weite B
Bodenfläche und Deckfläche je AB
Volumen 2AB Diagonale A plus B

Auf der zweiten Ebene fand ich viele Werte der obigen Zahlsäulen und Zahlfolgen, auch eine dreidimensionale Form der berühmten Kreisformel im Rhind Papyrus: ein Quadrat der Seitenlänge 8 und ein Kreis vom Durchmesser 9 haben praktisch dieselbe Fläche. Der implizite Wert für pi wäre 256/81 aus einer der obigen Pi-Folgen. Eine Pyramide, wohl ein Modell, hat eine Basis von 12 mal 12 Ellen und eine Höhe von 8 Ellen. Wie lang ist die schräge Höhe? Genau 10 Ellen, denn der halbe Querschnitt ist das ‚Heilige Dreieck’ 3-4-5 in der Form 6 Ellen (halbe Basis) und 8 Ellen (senkrechte Höhe) und 10 Ellen (schräge Höhe). Wie gross wäre die einbeschrieben Kugel als Symbol der Sonne im Ur-Hügel der Pyramide? Radius 3 Einheiten, Durchmesser 6 Einheiten. Wie gross ist das Volumen der Pyramide? 384 Kubik-Ellen. Welchen Durchmesser hätte eine Kugel vom selben Volumen? 9,018... oder praktisch 9 Ellen. Wir können diese Pyramide eine ‚Heilige Pyramide’ nennen, da sie das ‚Heilige Dreieck’ 3-4-5 in der Form 6-8-10 enthält. Nun ergibt sich eine hübsche Parallele zur Formel der Fläche

Ein Quadrat der Seitenlänge 8 und ein Kreis des Durchmessers 9
haben praktisch dieselbe Fläche

Eine ‚Heilige Pyramide’ der Höhe 8 und eine Kugel vom Durchmesser 9
haben praktisch dasselbe Volumen

Wie kann man das herausfinden? Möglicherweise mit Holzmodellen. Das Modell der Pyramide habe eine Basis von 12 mal 12 und eine Höhe von 8 Fingerbreiten. Ihre schräge Höhe misst 10 Fingerbreiten oder 10 f, ihre Basisfläche 144 Fingerbreiten im Quadrat oder 140 ff, ihre Seitenfläche 10 x 12 /2 = 60 ff, alle vier Seitenflächen zusammen 240 ff, die gesamte Oberfläche des Modells 384 Fingerbreiten im Quadrat.

Wie gross ist das Volumen des Modells? 1/3 x 12 f x 12 f x 8 f = 384 Fingerbreiten hoch drei.. Dieselbe Zahl 384 für die Oberfläche und das Volumen des Pyramidenmodells. Und eine Holzkugel vom Durchmesser 9 Fingerbreiten wäre praktisch gleich schwer.

Kapitel 11
Horus-Kalender

Das linke Auges des ägyptischen Horus-Falkens war der Mond, das rechte Auge die Sonne. Seth zerstörte das Mond-Auge. Der weise Thoth heilte es, indem er es aus den Bruchstücken ’2 ’4 ’8 ’16 ’32 ’64 zusammenfügte. Das geheilte Auge nannte er Das Ganze. Doch die Summe der obigen Teile ist keine ganze Eins, es fehlt ein kleiner Teil. Weshalb dann Das Ganze? Es handelt sich nicht um den ganzen Mond sondern um eine ganze Lunation oder einen ganzen synodischen Mond, von Leermond zu Leermond oder Vollmond zu Vollmond, 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 2,9 Sekunden (moderner Durchschnitt von 1989 AD). Man multipliziere einen ägyptischen Monat von 30 Tagen mit der Horus-Reihe ’2 ’4 ’8 ’16 ’32 ’64 und bekommt 29 ’2 ’32 Tage, oder 29 Tage 12 Stunden 45 Minuten. Der Fehler ist sehr klein, er beträgt weniger als eine Minute pro Lunation, oder etwa einen halben Tag auf eine Lebenszeit von sechzig Jahren.

Der Horus-Kalender geht meiner Meinung nach zurück auf einen von zwei lunisolaren Kalendern der Göbekli Tepe Region in Südost-Anatolien vor 12'000 Jahren.

Kapitel 12
Woher kommen unser Zifferblatt und der Kreis von 360 Grad ?

Der Göbekli Tepe ist in grosser Kalkstein-Hügel, auf den vor 12'000 Jahren eine bis fünf Meter tiefe Erdschicht deponiert wurde – nach meiner Berechnung etwa zwei Millionen Ledersäcke gefüllt mit Erde, in Ameisen-gleicher Prozession auf den ‚Hügel mit Nabel’ hinaufgetragen. Auf einer der vier Kuppen dürfte einst ein Heiligtum aus Pflöcken gestanden haben (später entfernt für die Heiligtümer aus steinernen Pfeilern). Das erste Heiligtum wäre ein genordeter Kreis von 12 Pflöcken gewesen, gleich angeordnet wie die Ziffern einer Uhr. In der Mitte wären zwei grössere Pflöcke nebeneinander gestanden, Symbole einer weiblichen Dreiheit und einer männlichen Dreiheit. Jeder Pflock des Kreises hätte einen Monat von 30 Tagen symbolisiert, alle zusammen ein Jahr von 360 Tagen – daher die 360 Grad des Kreises – während der Raum zwischen den grösseren Pflöcken in der Mitte 5 und manchmal 6 weitere Tage angezeigt hätte, im Ganzen ein reguläres Jahr von 365 Tagen und ein gelegentliches Schaltjahr von 366 Tagen, während 63 kontinuierliche Perioden von 30 Tagen eine Dauer von 1'890 Tagen ergeben und 64 Lunationen oder synodischen Monaten entsprechen. Zudem bildeten die 12 Pflöcke des Kreises (bei einem flachen Horizont) ein Observatorium der aufgehenden und untergehenden Sonne nicht nur bei den Tag- und Nachtgleichen (um den 21. März und 23. September) sondern auch bei den Sonnwenden (um den 21. Dezember und 21. Juni). Die folgenden Zahlen entsprechen den Marken oder Stunden auf einem Zifferblatt

11-1 10-2 9-3 8-4 7-5   Sonnenaufgang Tag- und Nachtgleiche
1-11 2-10 3-9 4-8 5-7   Sonnenuntergang Tag und Nachtgleiche

10-12 9-1 8-2 7-3 6-4   Sonnenaufgang Sommersonnwende
12-10 1-9 2-8 3-7 4-6   Sonnenuntergang Wintersonnwende

2-12 3-11 4-10 5-9 6-8   Sonnenuntergang Sommersonnwende
12-2 11-3 10-4 9-5 8-6   Sonnenaufgang Wintersonnwende

Kapitel 13
Kalender von Lascaux

Marie E.P. König interpretierte die prächtigen Stiere von Lascaux als Mondstier oder Mond, die Pferde als Sonnenpferd oder Sonne, die herabsteigenden Pferde in der Nische am hinteren Ende der axialen Galerie als müdes Winterpferd oder Wintersonne, und das Paar sich gegenüberstehender Steinböcke als Emblem der Wintersonnwende (um den 21. Dezember). Wir dürfen dann die beiden beschwingten ‚Chinesischen Pferde' in der axialen Galerie, welche von der Nische zur Rotunde eilen, als Frühlings-Sonne verstehen, die axiale Galerie als Jahr, die gloriose Rotunde als Mittsommer, und die rote Mähre welche sich in vollem Lauf über den Sims erhebt als aufgehende Sonne des 21. Juni nach unserem Kalender, Sommersonnwende, der grosse weisse Stier an ihrer Seite ein Vollmond der sich zu selben Zeit ereignet, idealer Start einer 8-jährigen Periode im Kalender von Lascaux.

Das Ideogramm zwischen den beiden Steinböcken und weitere Ideogramme führten mich zu folgendem Jahr von 365 Tagen

```
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  O   O   O   O   )   )   )   )   )   O   O   O   O
O   O   O   O   O   )   )   )   )   O   O   O   O   O
  O   O   O   O   )   )   )   )   )   O   O   O   O
O   O   O   O   O   )   )   )   )   O   O   O   O   O
  O   O   O   O   )   )   )   )   )   O   O   O   O
O   O   O   O   O   )   )   )   )   O   O   O   O   O
  O   O   O   O   )   )   )   )   )   O   O   O   O
O   O   O   O   O   )   )   )   )   O   O   O   O   O
  O   O   O   O   )   )   )   )   )   O   O   O   O
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
  )   )   )   )   O   O   O   O   O   )   )   )   )
)   )   )   )   )   O   O   O   O   )   )   )   )   )
```

Das grosse synkopische Quadrat zählt 365 Kieselsteinen weisser und grauer Farbe, oder 9 kleine synkopische Quadrate, vier mit je 40 grauen und 5 mit je 41 weissen Kieselsteinen, angeordnet in folgendem Muster

41 40 41
40 41 40
41 40 41

h i b
g a c
f e d

Perioden von 11 Lunationen werden so gezählt

30 29 30 29 30 29 30 29 30 29 30 325 Tage
29 30 29 30 29 30 29 30 29 30 29 324 Tage

Acht aufeinanderfolgende Kalender-Perioden entsprechen 11 Lunationen

abcdefgh 41 41 40 41 40 41 40 41 Summe 325
iabcdefg 40 41 41 40 41 40 41 40 Summe 324
hiabcdef 41 40 41 41 40 41 40 41 Summe 325
ghiabcde 40 41 40 41 41 40 41 40 Summe 324
fghiabcd 41 40 41 40 41 41 40 41 Summe 325
efghiabc 40 41 40 41 40 41 41 40 Summe 324
defghiab 41 40 41 40 41 40 41 41 Summe 325
cdefghia 40 41 40 41 40 41 40 41 Summe 324
bcdefghi 41 40 41 40 41 40 41 40 Summe 324

Ein Zyklus von 8 Jahren zählt 9 Perioden von 11 Lunationen, insgesamt 99 Lunationen; danach sind zwei Schalttage einzufügen und der Mondlauf wäre mit dem Sonnenlauf abzugleichen (er verschiebt sich jeweils ein wenig).

Kapitel 14
Lebombo Kalender, Afrika, möglicherweise 35,000 Jahre alt

Auf einem Pavian-Femur von der Lebombo-Höhle sind 29 Striche eingeritzt, ungefähr so

|||||||||||||||||||||||||||||

Mithilfe dieser Striche kann man sowohl einen Mondkalender als auch einen Sonnenkalender auslegen.

Für den Mondkalender beginne man mit ebenso vielen Kieselsteinen wie Strichen

○ ***

Dann ergänze man die Reihe mit synkopischen Reihen

```
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
 O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O     ***
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
 O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
 O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
 O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
```

Für den Sonnenkalender beginne man mit einer kurzen Reihe – so viele Steine wie Striche – und lege zwei Quadrate mit einer freien Linie in der Mitte aus, nur oben und unten mit je einem Stein verbunden

```
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O     ***
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
```

Danach entferne man die oberste Reihe und hat einen Kalender für ein reguläres Jahr

```
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O   O O O O O O O O O O O O O O
O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O O
```

Die Vorschrift für das Auslegen dieses Kalenders kann man in eine Geschichte verpacken, so wären keine Zahlen erforderlich.

Die halben Reihen von 14 Steinen könnte man als lange Wochen bezeichnen. 19 lange Wochen sind 266 Tage oder 9 Lunationen gezählt im 30 29 30 Modus. 21 lange Wochen sind 294 Tage, plus der Mittelstein in der unteren Reihe 295 Tage oder 10 Lunationen gezählt im 30 29 30 Modus oder im 29 30 29 Modus.

Mathematik wäre die Logik des Bauens und Erhaltens. Kalender waren möglicherweise die ersten mathematischen Errungenschaften. Wie ist ein Kalender mit Bauen vereinbar? Es geht gleichsam um das Haus der Menschheit, Himmel und Erde vereint.

Kapitel 15
Mathematische Logik und künstlerische Logik

Die Mathematik als Logik des Bauens und Erhaltens basiert auf der Formel $a = a$ während die Kunst als menschliches Mass in einer technischen Welt auf Goethes Weltformel und ewig sich drehendem Schlüssel (Tagebuch der italienischen Reise) basiert: „Alles ist gleich, alles ungleich ...“ (Wilhelm Meisters Wanderjahre, Aus Makariens Archiv, am Ende des Romans, ursprünglich für die Mitte geplant, auch in den Maximen und Reflexionen).

Galilei sagte, das Buch der Natur sei in der Sprache der Mathematik geschrieben ... Gott mag die ganze Natur in mathematischen Begriffen verstehen, während wir nur gerade die ersten Zeilen auf der ersten Seite dieses ‚Buches’ entziffert haben, eines Buches dessen viele Seiten wir nicht einmal zählen können.

Wir haben viel erreicht, aber sind noch lange nicht auf dem Gipfel angekommen. Der Berg wächst beim Klettern ...

Wir werden nie eine wirkliche ‚Theorie von Allem’ haben, doch wir können einen Rat von Goethe befolgen:

> Willst Du ins Unendliche schreiten
> Geh nur im Endlichen nach allen Seiten.

Künstler und Künstlerinnen haben seit jeher an die andere Seite der Logik appelliert, welche Goethe benannte und auch in einer sehr schönen Passage in seinem Essai Heidelberg für die bildnerische Arbeit erschloss:

Alles, was uns daher als Zierde ansprechen soll, muss gegliedert sein, und zwar im höheren Sinne, dass es aus Teilen bestehe, die sich wechselsweise aufeinander beziehen. Hiezu wird erfordert, dass es eine Mitte habe, ein Oben und Unten, ein Hüben und Drüben, woraus zuerst Symmetrie entsteht, welche, wenn sie dem Verstande völlig fasslich bleibt, die Zierde auf der geringsten Stufe genannt werden kann. Je mannigfaltiger dann aber die Glieder werden, und je mehr jene anfängliche Symmetrie, verflochten, versteckt, in Gegensätzen abgewechselt, als ein offenbares Geheimnis vor unsern Augen steht, desto angenehmer wird die Zierde sein, und ganz vollkommen, wenn wir an jene ersten Grundlagen dabei nicht mehr denken, sondern als von einem Willkürlichen und Zufälligen überrascht werden.

Kapitel 16
Faire Kulturgeschichte

Im Jahr 2010 sagte die damalige Bundespräsidentin Doris Leuthard am Radio, die Schweiz brauche neue Projekte. Ich schickte ihr mein Papier *Für eine faire Kulturgeschichte* und bekam eine freundliche Antwort (mein Schreiben datierte vom 29. März 2001, ihre Antwort vom 6. April 2011). Ich möchte zwei Sätze der Antwort zitieren:

> Ihre Ausführungen zeigen anschaulich auf, wie viele und verschiedenartige Probleme in unserer Welt mit Hilfe der Mathematik gelöst oder zumindest doch erklärt werden können. Daneben sind mir auch die Parallelen zur Politik aufgefallen: Nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Politik ist vieles miteinander verbunden, kann man fast jedes Problem von verschiedenen Seiten angehen, und gibt es oftmals mehr als nur einen einzigen richtigen Weg.

Die frühe Mathematik ging andere Wege als wir sie kennen, verwendete einfache aber clevere additive Algorithmen, und kleidete sie in Mythen statt Formeln, leistete aber gleichwohl Grosses, ja es gibt einen mathematischen Kosmos einschliesslich einer systematischen Berechnung des Kreises noch bevor die griechische Mathematik am Horizont erschien. Eine prosperierende globale Gesellschaft erfordert meiner Meinung nach eine faire Kulturgeschichte, welche die Leistung aller Völker würdigt.

Im Folgenden soll eine weitere ungewöhnliche frühe Methode vorgestellt werden: die Kombination zweier Masse. Dann werden wir nocheinmal auf die additiven Zahlfolgen eingehen.

Kapitel 17
Horus-Elle und Königs-Elle

Der Baumeister der Cheops-Pyramide dürfte die Königs-Elle des Alten Reiches (52.36 cm) mit mehreren komplementären Massen kombiniert haben, welche ungefähr gleich lang waren und der Körperlänge eines Turmfalkens von Schnabel bis Schwanzfedern entsprachen. Alle Horus-Ellen waren rational definiert. Am wichtigsten wäre die Horus-Elle auf Basis der Zahlen 7 und 11

7 Königs-Ellen gleich 11 Horus-Ellen

Die beiden komplementären Masse erlauben einfache geometrische Formeln

Durchmesser eines Kreises 1 Horus-Elle
Umfang 2 Königs-Ellen

Radius eines Kreises 1 Horus-Elle
Fläche 1 Königs-Elle mal 2 Horus-Ellen

Seite eines Quadrates 10 Horus-Ellen
Diagonale 9 Horus-Ellen

Seite eines Quadrates 9 Horus-Ellen
Diagonale 20 Horus-Ellen

Eine Strecke messe 5 Königs-Ellen
der goldene Minor misst 3 Horus-Ellen

Ein Modell der Cheops-Pyramide habe eine Basis von 1 mal 1 Königs-Elle
ihre Höhe beträgt eine Horus-Elle.

Kapitel 18
Salomon machte ein Meer (Wasserbecken) aus Bronze

Die Bibel erzählt wie der weise Salomon ein bronzenes Meer machte, ein Wasserbecken vom Durchmesser 10 Ellen und vom Umfang 30 Ellen. Das ergäbe 30/10 oder 3/1 oder 3 für pi. Hatte der weise Mann wirklich so eine armselige Idee von Geometrie? Oder kann es sein, dass in der Überlieferung eine kleine aber wichtige Information verloren ging? Man stelle sich zwei fast gleich lange Ellen vor, die so definiert sind

schwarze Elle 21 Fingerbreiten   rote Elle 22 Fingerbreiten

Auch die Kombination dieser beiden Masse erlaubt einfache geometrische Formeln

Durchmesser eines Kreises 1 schwarze Elle
Umfang 3 rote Ellen

Durchmesser des bronzenen Meeres 10 schwarze Ellen
Umfang 30 rote Ellen

Radius eines Kreises 1 schwarze Elle
Fläche 3 schwarze Ellen mal 1 rote Elle

Durchmesser einer Kugel 2 schwarze Ellen
Volumen 2 schwarze Ellen mal 2 schwarze Ellen mal 1 rote Elle

Seite eines Quadrates 20 schwarze Ellen
Diagonale 27 rote Ellen

Seite eines Quadrates 27 rote Ellen
Diagonale 40 schwarze Ellen

Das bronzene Meer dürfte ein steinernes Wasserbecken gewesen sein, zylinderförmig, innerer Durchmesser 10 schwarze Ellen, Tiefe 5 schwarze Ellen, innerer Umfang 30 rote Ellen, der Beckenrand mit Bronze verkleidet. Für pi erhält man 30x22 / 10x21 = 660/210 = 66/21 = 22/7.

Kapitel 19
Faden der Ariadne

Der Mond war die älteste Uhr der Menschheit. Langjährige Beobachtungen führten schon in sehr früher Zeit zu einer cleveren Zählweise der Lunationen oder synodischen Monate – von einer Mondphase zur selben Phase im nächsten Zyklus, beispielsweise von Vollmond zu Vollmond, oder von Leermond zu Leermond

30 29 30 29 30 29 30 29 30 29 30 ... Tage für 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... Lunationen
29 30 29 30 29 30 29 30 29 30 29 ... Tage für 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... Lunationen

Der 30 29 30 Modus ergibt bessere Ergebnisse

1 Lunation dauert 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 2,9 Sekunden
oder 29,530589... Tage (moderner Durchschnitt von 1989 AD)

1 Lunation	30 Tage	genau	29,530... Tage	gerundet	30 Tage			
2 Lunationen	59 Tage	genau	59,061... Tage	gerundet	59 Tage			
3 Lunationen	89 Tage	genau	88,591... Tage	gerundet	89 Tage			
4 Lunationen	118 Tage	genau	118,122... Tage	gerundet	118 Tage			
5 Lunationen	148 Tage	genau	147,652... Tage	gerundet	118 Tage			
6 Lunationen	177 Tage	genau	177,183... Tage	gerundet	177 Tage			
7 Lunationen	207 Tage	genau	206,714... Tage	gerundet	207 Tage			
8 Lunationen	236 Tage	genau	236,244... Tage	gerundet	236 Tage			
9 Lunationen	266 Tage	genau	265,775... Tage	gerundet	266 Tage			
10 Lunationen	295 Tage	genau	295,305... Tage	gerundet	295 Tage			
11 Lunationen	325 Tage	genau	324,836... Tage	gerundet	325 Tage			
12 Lunationen	354 Tage	genau	354,367... Tage	gerundet	354 Tage			
13 Lunationen	384 Tage	genau	383,897... Tage	gerundet	384 Tage			
14 Lunationen	413 Tage	genau	413,428... Tage	gerundet	413 Tage			
15 Lunationen	443 Tage	genau	442,958... Tage	gerundet	443 Tage ***			
16 Lunationen	472 Tage	genau	472,489... Tage	gerundet	472 Tage			
17 Lunationen	502 Tage	genau	502,020... Tage	gerundet	502 Tage ***			

Für längere Perioden kann man diese Folge verwenden

17 15 17 15 17 Lunationen

aufaddiert 17 32 49 64 81 Lunationen

oder 502 945 1447 1890 2392 Tage

1'890 Tage wären 270 Wochen à sieben Tagen.

3 Jahre sind etwas länger als 37 Lunationen, 8 Jahre nur wenig kürzer als 99 Lunationen (Kalender von Lascaux). Mit diesen beiden Werten können wir eine Zahlenfolge aufziehen, indem wir jeweils die Zähler und Nenner zweier Brüche addieren, Lunationen / Jahre

37 / 3   99 / 8   136 / 11   235/19   371 / 30

19 Jahre entsprechen ziemlich genau 235 Lunationen. Dies war die Basis des Kalenders von Meton, einem griechischen Astronomen des 5. vorchristlichen Jahrhunderts, doch die Relation dürfte schon im Minoischen Knossos bekannt gewesen sein.

Minotaurus, halb Stier halb Mann, hauste im Labyrinth von Knossos. Alle neun Jahre forderte er von Minos dem König sieben junge Männer und sieben junge Frauen. Viele tapfere Männer haben es mit dem Ungeheuer aufgenommen, aber gingen im Labyrinth verloren. Dann kamen Theseus und Ariadne. Der Held wagte sich mit Ariadnes Faden und Schwert ins Labyrinth, markierte den Weg mit dem Faden, traf schliesslich auf den Minotaurus, zog das Schwert, überwältigte das Monster, rettete die sieben jungen Frauen und sieben jungen Männer, und alle fanden heil hinaus, indem sie dem Faden folgten ... Der Mythos könnte einen Kalender in eine leicht fassliche Geschichte verpackt haben. Minotaurus als Doppelnatur (halb Mensch halb Stier) würde zwei zeitliche Perioden symbolisieren: 9 Lunationen und 235 Lunationen. Die sieben jungen Männer und sieben jungen Männer wären Perioden von je 19 Tagen. König Minos würde 9 Jahre personifizieren und der Held Theseus 19 Jahre, während das Schwert und der Faden der Ariadne das Geschick der frühen Astronomen symbolisierte, der Faden insbesondere additive Zahlfolgen.

9 Lunationen ‚fordern' 7 und 7 Perioden von 19 Tagen (266 Tage)
9 Jahre ‚absorbieren' 173 Perioden von 19 Tagen
19 Jahre ‚überkommen' 235 Lunationen

Die Fabel von Theseus und Ariadne, König Minos und dem Minotaurus, den sieben jungen Frauen und Männern wäre ein einfaches Mittel gewesen um einen komplizierten Kalender zu vermitteln.

Erinnern Sie sich an den Lebombo Kalender? Auch dieser hätte in eine Geschichte eingekleidet werden können, welche die Anleitung für das Auslegen der Kieselsteine bewahrt haben würde.

Kapitel 20
einfach aber komplex

Mein Bruder Steve, Informatiker, der freundlicherweise meine Webseite www.seshat.ch betreut, wünschte sich ein Buch, etwas mehr Substanz als manipulierte Elektronen. Die vorliegenden Kapitel reichen immerhin für eine Broschüre, zu der mich auch ein paar Anfragen ermuntern.

Es machte mir Spass, die vergessenen Methoden der frühen und frühesten Mathematik auf spielerische Weise zu rekonstruieren, oder einfach mal zu fragen: gibt es einfachere Wege ein Problem zu lösen als wir es in der Schule gelernt haben? Ja, es gibt solche Wege. Mir fiel das Rechnen leicht, aber ich sah manche Kamerädlein in der Primarschule in diesem Fach leiden, und glaube dass der übliche Weg für viele zu steil beginnt: gleich in die Felswand statt erst mal über eine Blumenwiese sanft auf einen Hügel steigen ... Die vorliegende Broschüre soll einen sanfteren Weg aufzeigen. Sie soll Ideen liefern, welche Lehrerinnen und Lehrer für neue Lektionen verwenden mögen.

Ich habe nie verstanden, was mein Bruder Steve arbeitet, bis er mir einmal sagte, er drehe und wende ein Informatik-Problem so lange, bis es ganz einfach werde und dabei die grösstmögliche Zahl von Lösungen anbiete. Das habe ich verstanden! In meinen kulturwissenschaftlichen Arbeiten geht es mir gleich, in den Zeugnissen früher Kulturen finde ich immer wieder dieselbe Formel: einfach aber komplex, auf Englisch *simple yet complex.* Wir haben den Eindruck, ein Figürchen oder ein Symbol wäre sehr einfach, dann finden wir aber viele Ideen darin welche auf elegante Weise miteinander verbunden sind.

Wir haben es sehr viel weiter gebracht als die Menschen die uns vor Jahrtausenden den Weg ebneten, jedoch sind auch unsere modernen Methoden beschränkt. Wenn man viel später einmal auf unsere Epoche zurückblicken wird, könnten viele der heutigen Errungenschaften verblassen vor dem was unsere Nachfahren bis dahin geleistet haben werden. Was wir tun bleibt immer beschränkt, jedoch sind auch einfache Methoden sehr hilfreich, wenn wir sie kunstvoll anwenden. Auch dies können wir von der frühen Mathematik lernen.