Ideen für einen neuen Mathematik-Unterricht

Für meinen Schüler Faisal.

Mein Dank geht an Christian Rieger für seine ermunternden Worte,
und an Ursula, die mir freundlicherweise ihr Notebook auslieh.

Alle Illustrationen (Links in diesem Dokument)
sind im PDF «Alle Bilder»
im Register «Books»
zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Arme Schulkinder

Im Rechnen war ich immer sehr gut, habe jedoch viele meiner Schulkameraden in den mathematischen Fächern leiden sehen. In den ersten Jahren lernten und übten wir das kleine und grosse Einmaleins, dann ging es weiter zu den Euklidschen Axiomen. Sehr abstrakt. Wer am Anfang nicht mitkam, war schon verloren. Nach meiner Schulzeit wurde der Mathematik-Unterricht reformiert: mit der Einführung der Mengenlehre in der Primarschule. Noch viel abstrakter. Die Reform scheiterte. In der vorliegenden Schrift, die sich an Lehrer und Lehrerinnen wie auch an die Schweizer Schulbehörden richtet, strebe ich eine Reform im Gegensinne an: spielerische Wege zur Algebra und Geometrie.

Der namhafte amerikanische Mathematik-Historiker Victor J. Katz empfiehlt eine Lehre der mathematischen Fächer längs ihrer historischen Evolution. Ich finde seine Idee sehr gut, meine aber, man sollte wirklich am Anfang beginnen und werde mich von paläolithischen Felsgravuren inspirieren lassen, wie sie in den Büchern von Marie E.P. König zu finden sind, und werde dann vor allem meine Rekonstruktionen altägyptischer und babylonischer Verfahren einbringen.

Die Schweizer Schulmädchen seien in der Mathematik besonders schwach. Das liegt kaum an ihnen selber sondern eher am hiesigen Unterricht. Wie nämlich neue Studien zeigen, sind die Mädchen in den mathematischen Fächern ebenso begabt wie die Knaben, sie gehen jedoch anders an die Aufgaben heran: sie arbeiten besonders gerne mit Mustern, während sich die Knaben eher auf Zahlen fixieren, und sie möchten das Ganze einer Aufgabe im Auge behalten, während sich die Knaben offenbar leichter mit Details befassen. Ein zeitgemässer Unterricht sollte diese Unterschiede ernst nehmen und auf die Mädchen besser eingehen.

Als ich ein Bub war, hörte ich sagen, dass die Männer klüger seien als die Frauen, und das liege am grösseren männlichen Hirn. Inzwischen sind wir besser informiert. Das menschliche Gehirn zählt hundert Milliarden Neuronen, von denen jedes mit zehntausend - anderen Neuronen verknüpft ist --- eine unglaubliche Komplexität, die einem zwölf-dimensionalen Raum entsprechen soll. Die weiblichen Neuronen seien kürzer als die männlichen aber dafür mit mehr anderen Neuronen verknüpft. Als Laie würde ich sagen, dass dies einem weiblichen Denken in mehr Dimensionen entspreche. Das corpus callosum des weiblichen Gehirnes, gleichsam die Brücke zwischen den beiden Hirnhälften, sei breiter, die weiblichen Hemisphären seien darum besser miteinander verbunden als die männlichen. Auch sollen die Männer gewisse Aufgaben lediglich mit einer Hirnhälfte angehen, während die Frauen dieselben Aufgaben mit beiden Hemisphären lösen. Diese neurologischen Befunde passen meiner Meinung nach sehr gut mit den Ergebnissen der oben erwähnten Studien zusammen, und es mag wohl sein, das es sich mit dem kleineren weiblichen Gehirn so ähnlich verhält wie mit einem Super-Computer: klein aber fein. Je dichter die Elemente eines solchen Gerätes zusammengepackt und je besser sie miteinander verknüpft sind desto mehr leistet es.

Wie ein weiser Mensch sagte - leider weiss ich nicht wer es war - sei die Mathematik im Prinzip ein Spiel mit Mustern. Wenn sich also die Mädchen besonders gut auf Muster verstehen, so haben sie wohl einen natürlichen Zugang zu den mathematischen Fächern, den es zu nutzen gälte. - Im vorliegenden Heft werde ich mit einfachen Mustern beginnen, und werde auch später , wo es um Zahlen geht, immer wieder Muster aufzeigen. Meine Methoden habe ich zum Teil im Nachhilfe-

Unterricht erprobt, und ich darf sagen mit einigem Erfolg. So hoffe ich, dass meine Schrift, die erst ein Anfang sein kann, ein paar Lehrerinnen und Lehrer zum Ausprobieren von neuen Methoden animiert, oder auch zum Entwickeln von eigenen Lehrmethoden inspiriert.

Ein Spiel mit Mustern

Was für Muster kann man mit 9 Steinchen auslegen? Hier ein paar Versuche, inspiriert von paläolithischen Felsgravuren in Höhlen der Ile de France (Paris und Umgebung), wie sie in den Büchern von Marie E.P. König zu sehen sind. Paleolithic patterns 1 / patterns

Aufgabe Finde weitere Muster, auch mit einer grösseren Anzahl von Steinchen ♣

A very simple computer

Please draw a grid with 3 rows of 3 squares and number them 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Add four squares as above and mark two of them with the number zero, and the other two with the letter X (Roman ten). Inscribe the number 0 twice and twice the letter X. Now use a set of pretty pebbles, or polished mineral disks, or beans, and you have got a very simple computer ... a very simple computer

How to use it? First, let us consider just the nine central fields numbered from one to nine. Let us place four small pebbles (or mineral disks, or beans) at the corners like this:

```
1 2 3     o . o     1 . 3

4 5 6     . . .     . . .     1 + 3 + 7 + 9 = 20

7 8 9     o . o     7 . 9
```

The pebbles (or mineral disks, or beans) represent the numbers 1, 3, 7, 9, and add up to 20. Now let us play with the pebbles. Move one pebble to the right hand side and another one to the left hand side. The resulting sum will again be 20:

```
1 2 3     . o o     . 2 3

4 5 6     . . .     . . .     2 + 3 + 7 + 8 = 20

7 8 9     o o .     7 8 .
```

Now move one pebble downwards, another one upwards. The sum will remain 20:

```
1 2 3     . . o     . . 3

4 5 6     o o .     4 5 .     3 + 4 + 5 + 8 = 20

7 8 9     . o .     . 8 .
```

Move one pebble downwards two fields, and two other pebbles upwards one field each. The sum will remain 20:

```
1 2 3     o o .     1 2 .

4 5 6     . . .     . . .     1 + 2 + 8 + 9 = 20
```

```
  7 8 9     . o o     . 8 9
```

Move one pebble downwards in an oblique direction and another upwards in the parallel direction. The sum will remain 20:

```
  1 2 3     o . .     1 . .

  4 5 6     o . o     4 . 6     1 + 4 + 6 + 9 = 20

  7 8 9     . . o     . . 9
```

Move one pebble two fields towards the right, and another one two fields towards the left. The sum will remain 20:

```
  1 2 3     . . o     . . 3

  4 5 6     o . o     4 . 6     3 + 4 + 6 + 7 = 20

  7 8 9     o . .     7 . .
```

Move one pebble to the left hand side and one to the right hand side. The sum will remain 20:

```
  1 2 3     . o .     . 2 .

  4 5 6     o . o     4 . 6     2 + 4 + 6 + 8 = 20

  7 8 9     . o .     . 8 .
```

All the above patterns represent the number 20. Two of them are shown again below:

```
  o . o     1 . 3        . o .    . 2 .

  . . .     . . .        o . o    4 . 6

  o . o     7 . 9        . o .    . 8 .
```

Task: Using three pebbles, lay out the number 15. Move the pebbles about in the above manner, find all the possible variants, and draw them on paper.

Now let us go a step further. Using that very simple number field plus the four additional squares marked 0 and X we can add up small numbers. An example: How much is 1 plus 4 plus 8 plus 3? Place pebbles (or mineral disks, or beans) on the respective squares:

```
    0

 0 1 2 3       o . o     1 . 3

  4 5 6       o . .     4 . .    sum = ??

  7 8 9 X     . o .     . 8 .

  X
```

Now try to move as many pebbles as possible from the center field to the four side fields, whereby each move must be followed by a counter-move. You may proceed in this way:

```
                    0           0           0
```

```
  o . o     0 . . o     0 . . .     0 . . .     0 . . .
  o . .       o . .       . . .       . . o       . . 6
  . o .       . . o       o . o       . . .       . . .
                  X           X
```

Result: two zeroes, one six, a Roman ten, sum sixteen. Checking the result on a pocket calculator: 1 + 4 + 8 + 3 = 16.

1 plus 3 plus 7 plus 9 should equal 20:

```
.                                   0
  o . o     0 . . o        0 . . .
  . . .       . . .          . . .       0 + 0 + X + X = 20
  o . o       o . . X        . . . X
              X
```

2 plus 4 plus 6 plus 8 should again equal 20:

```
                             X
  . o .     o . .     0 . . .      0 . . o       0 . . .
  o . o     o . o       o . o        . . .         . . .
  . o .     . . o       . . . X      o . . X       . . . X
                        0
```

A couple of tasks: How much is 4 times 4? 5 times 5? 6 times 6? Place four beans on field 4, or five beans on field 5, or six beans on field 6, and proceed as above ♣ How much is 3 times 7? Place three beans on field 7 and proceed as above ♣ How much is 7 times 3? Place seven beans on field 3 and proceed as above ♣ 1 plus 8 plus 3x5 minus 7 = ?? Place the beans on the respective fields, move them in such a way that one of them comes to lay on field 7, remove that bean, and proceed again as above.

Variants: You may lay out cotton or felt squares on the classroom floor, sit around them, use larger pebbles, and discuss the moves. Or you may draw a large field with chalk on the floor of a school-yard, and the children may act as numbers ...

Such games might give children a feeling for numbers and take away their fear of the mathematical disciplines.

A more demanding calculating board

How much is 24 times 25? This calculation may be carried out using a calculating board consisting of three fields and two lines, small beans for the number 1 (here given by the letter o), and large beans for the number ten (here given by the letter X). As a first step lay out the number 24 in the above line, then the number 10x24 = 240 in the second line. For the second step multiply the first line by a factor of 2, and the second line by a factor of 5. Finally, add the numbers together. If you have proceeded correctly, you will obtain 600 calculating board

Task: How much is 625 times 625? (this problem requires a calculating board consisting of 6 fields of 3 lines each).

Der allereinfachste Computer

```
          0
 1 2 3       0 . . .
 4 5 6         . . .
 7 8 9         . . . X
        0
```

Das Wort Computer kommt vom lateinischen computare = zusammenrechnen, berechnen. Ein einfacher Computer wäre ein Spielfeld aus 3 mal 3 gleich 9 Feldern, welche die Zahlen von 1 bis 9 repräsentieren; dazu kämen je zwei Felder mit dem Zahlenwert 0 und X = römisch Zehn. a very simple computer

Man lege Steinchen (zum Beispiel geschliffene Mineralien-Scheibchen) auf die Felder. Jedes von ihnen nehme den Wert seines Feldes an. Ein Beispiel. Ich lege je ein Steinchen auf die Ecken des Spielfeldes und bekomme so die Zahlen 1, 3, 7, 9 mit der Summe 20:

```
 1 2 3    o . o    1 . 3
 4 5 6    . . .    . . .    1 + 3 + 7 + 9 = 20
 7 8 9    o . o    7 . 9
```

Nun können wir mit den Steinchen spielen. Ich verschiebe eines nach rechts und dafür ein anderes nach links, so bleibt die Summe 20 erhalten:

```
 1 2 3    . o o    . 2 3
 4 5 6    . . .    . . .    2 + 3 + 7 + 8 = 20
 7 8 9    o o .    7 8 .
```

Man bewege ein Steinchen nach unten, ein anderes nach oben:

```
 1 2 3    . . o    . . 3
 4 5 6    o o .    4 5 .    3 + 4 + 5 + 8 = 20
 7 8 9    . o .    . 8 .
```

Man bewege ein Steinchen um zwei Felder nach unten, dafür zwei andere je um ein Feld nach oben:

```
 1 2 3    o o .    1 2 .
```

```
4 5 6     . . .     . . .     1 + 2 + 8 + 9 = 20

7 8 9     . o o     . 8 9
```

Man bewege ein Steinchen schräg nach unten, das andere parallel nach oben:

```
1 2 3     o . .     1 . .

4 5 6     o . o     4 . 6     1 + 4 + 6 + 9 = 20

7 8 9     . . o     . . 9
```

Man bewege ein Steinchen zwei Häuschen nach rechts, das andere zwei Häuschen nach links:

```
1 2 3     . . o     . . 3

4 5 6     o . o     4 . 6     3 + 4 + 6 + 7 = 20

7 8 9     o . .     7 . .
```

Man schiebe ein Steinchen nach rechts, ein anderes nach links:

```
1 2 3     . o .     . 2 .

4 5 6     o . o     4 . 6     2 + 4 + 6 + 8 = 20

7 8 9     . o .     . 8 .
```

Alle obigen Muster bilden die Zahl 20 ab, das erste mit ungeraden, das letzte mit geraden Zahlen:

```
o . o     1 . 3     . o .    . 2 .

. . .     . . .     o . o    4 . 6

o . o     7 . 9     . o .    . 8 .
```

Als nächstes kann man mithilfe dieses einfaches Computers addieren. Wieviel gibt 1 plus 4 plus 8 plus 3? Man lege Steinchen auf die entsprechenden Felder und führe beliebige Züge aus - mit der Auflage, dass auf jeden Zug ein Gegenzug im obigen Sinne folge. Wenn ein Steinchen links oben oder rechts oben aus dem Spielfeld verschwindet (0), so nimmt es den Wert Null an, wenn dafür ein Steinchen links unten oder rechts unten aus dem Spielfeld verschoben wird (X, römisch Zehn), nimmt es den Wert 10 an. Ein Beispiel. Wieviel ergibt 1 plus 4 plus 8 plus 3?

```
  0

0 1 2 3      o . o     1 . 3

 4 5 6      o . .     4 . .   Summe gleich ??

 7 8 9 X    . o .     . 8 .

 X
```

Ich schiebe ein Steinchen nach links aus dem Feld (0) und eines um ein Häuschen nach rechts; dann schiebe ich ein Steinchen nach oben aus dem Feld (0) und ein anderes um ein Häuschen nach unten;

dann schiebe ich dasselbe Steinchen nach unten aus dem Feld (X), und als Gegenzug das verbleibende Steinchen um ein Häuschen nach oben:

```
            0            0           0
o . o     0 . . o     0 . . .     0 . . .     0 . . .
o . .       o . .       . . .       . . o       . . 6
. o .       . . o       o . o       . . .       . . .
                X           X
```

Als Ergebnis bekomme ich zweimal 0 gleich Null, einmal X gleich 10, und einmal 6, macht zusammen 16. Es gäbe mehrere Lösungswege (bitte ausprobieren); alle führen zum selben Ergebnis. Probe mit dem Taschenrechner: 1 + 4 + 8 + 3 = 16. / 1 plus 3 plus 7 plus 9 sollte 20 ergeben, desgleichen die Summe 2 plus 4 plus 6 plus 8:

```
.                                   0
  o . o     0 . . o        0 . . .
  . . .       . . .          . . .       0 + 0 + X + X = 20
  o . o       o . . X        . . . X
              X
```

```
                           X
. o .     o . .     0 . . .      0 . . o       0 . . .
o . o     o . o       o . o        . . .         . . .
. o .     . . o       . . . X      o . . X       . . . X
                      0
```

Aufgaben Nimm 3 Steinchen, lege die Zahl 15 aus, finde alle Varianten und zeichne sie auf Papier. ♣ Wieviel gibt 4 mal 4? Wieviel gibt 5mal 5? Wieviel gibt 6 mal 6? Lege 4 Bohnen auf das Feld Nummer 4 resp. 5 Bohnen auf das Feld Nummer 5 resp. 6 Bohnen auf das Feld Nummer 6 und verfahre wie oben. ♣ Wieviel gibt 3 mal 7? Lege 3 Bohnen auf das Feld Nummer 7 ... ♣ Wieviel gibt 7 mal 3? Lege 7 Bohnen auf das Feld Nummer 3 ... ♣ 1 plus 8 plus 3x5 minus 7 gleich ?? Lege die Bohnen aus, bewege sie so dass eine auf Feld Nummer 7 kommt, hebe diese Bohne weg und fahre fort wie oben. ♣

Variante: die Felder mit Kreide auf den Boden zeichnen oder mit Filzplatten auslegen, grosse Scheiben als Zahlsymbole verwenden, die Züge besprechen.

Spiele solcher Art könnten Schulkindern in den ersten Klassen ein Gefühl für Zahlen geben und ihnen vielleicht ein wenig die Furcht vor der Mathematik nehmen.

Ein Rechenbrett für höhere Ansprüche

Wieviel gibt 24 mal 25? Diese Aufgabe lässt sich mit einem Rechenbrett aus 3 Feldern und 2 Zeilen sowie gewöhnlichen Symbolsteinchen für die Zahl Eins (o) und grösseren Symbolsteinchen für die Zahl (X) lösen. Man lege die Zahl 24 in der ersten Zeile aus, dann die Zahl 10 mal 24 gleich 240 in der zweiten Zeile. Danach multipliziere man die beiden Zeilen mit den Faktoren 2 und 5. Dann zähle man die Steinchen zusammen und wird 600 bekommen: calculating board

Aufgabe Wieviel gibt 625 mal 625? Diese Multiplikation erfordert ein Rechenbrett mit 6 Feldern à 3 Zeilen ♣

Goldenes Rechteck

Wer erinnert sich noch an die Definition des Goldenen Schnittes? Wer könnte noch ein Goldenes Rechteck zeichnen? Hier eine sehr einfache Methode zu seiner Approximation: Zeichne ein beliebiges Rechteck. Ergänze eine der längeren Seiten zum Quadrat, so resultiert ein neues Rechteck. Ergänze eine der längeren Seiten dieses Rechteckes zum Quadrat, so resultiert wieder ein neues Rechteck. Und so weiter. Der Rahmen der Figur nähert sich dem Goldenen Rechteck an: golden rectangle

Beginnt man mit dem Quadrat 1 mal 1, so findet man beim Auszählen der Seitenlängen des wachsenden Rechteckes die sog. Fibonacci-Folge

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...;

Beginnt man mit dem Rechteck 1 mal 3, so findet man die sog. Lucas-Folge

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322 ...

Diese und weitere goldene Zahlfolgen lassen sich auch numerisch gewinnen:

```
1 + 1 = 2
  1 + 2 = 3
    2 + 3 = 5
      3 + 5 = 8
        5 + 8 = 13
          8 + 13 = 21
            13 + 21 = 34
              21 + 34 = 55
                34 + 55 = 89
                  55 + 89 = 144
                     ..............
1 + 3 = 4
```

```
3 + 4 = 7
  4 + 7 = 11
    7 + 11 = 18
      11 + 18 = 29
        18 + 29 = 47
          29 + 47 = 76
            47 + 76 = 123
              76 + 123 = 199
                123 + 199 = 322
                   ..............
```

Das Spiel geht mit jedem beliebigen Paar Anfangszahlen, etwa 2 und 7 respektive 7 und 2:

```
2 + 7 = 9
  7 + 9 = 16
    9 + 16 = 25
      16 + 25 = 41
        25 + 41 = 66
          41 + 66 = 107
            66 + 107 = 173
              107 + 173 = 280  usw.
2 + 7 = 9
```

```
7 + 2 = 9
  2 + 9 = 11
    9 + 11 = 20
      11 + 20 = 31
        20 + 31 = 51
          31 + 51 = 82
            51 + 82 = 133
              82 + 133 = 215  usw.
```

Man kann auch Fehler machen, die Zahlen bilden dennoch eine goldene Folge:

```
1 + 4 = 5
  4 + 5 = 11
```

```
      5 + 11 = 16
        11 + 16 = 27
          16 + 27 = 43  usw.
  1 + 2 = 3
    2 + 3 = 4
      3 + 4 = 7
        4 + 7 = 12
          7 + 12 = 19
            12 + 19 = 31
              19 + 31 = 50  usw.
```

Gitter

Die altsteinzeitlichen Felsgravuren in den Höhlen der Ile de France (Paris und Umgebung) zeigen viele Netze oder Gitter, bisweilen in Kombination mit einer runden Form, während ein Nummulitus perforatus aus einer paläolithischen Siedlung in Ungarn ein feines eingraviertes Kreuz aufweist. Gemäss der plausiblen Erklärung von Marie E.P. König symbolisieren die runden Formen den Himmel, die eine Kreisachse und die zu ihr parallelen Gitterlinien die Richtung Ost-West, die andere Kreisachse und ihre Gitterlinien die Richtung Süd-Nord, und die aus den Linien gebildeten Häuschen die Himmelshäuser ... Paleolithic patterns 1 / Paleolithic patterns 2

Sollten die paläolithischen Rundformen und Gitter wirklich auf den Himmel und seine überirdischen Mächte verweisen, so dürften die Menschen jener Zeiten sehr wohl ein Interesse daran gehabt haben, solchen ersten geometrischen Formen eine ganz besondere Beachtung zu schenken, denn wer weiss, ob das Geheimnis der Himmelsmächte über ihr Abbild zu erforschen sei?

Gitter haben nicht nur eine symbolische Bedeutung: sie führen geradewegs zur Geometrie und erschliessen selbst ein vor-archimedisches Verfahren der Kreisberechnung, das in einem späteren Kapitel vorgestellt werden soll.

Die Gitter der Felsgravuren sind unregelmässig geformt, was gewiss an dem harten Stein liegt. Wir können uns aber sehr wohl vorstellen, dass einige Schamanen jener längst vergangenen Zeit an einem Flussufer eine glatte Lehmbank vorfanden, einen gleichmässig runden Holzstab in regelmässigen Abständen mit Baststreifen umwickelten, den Stab auf der Lehmbank abrollten, erst in einer Richtung, dann in quer dazu, und auf solche Weise ein nahezu perfektes Gitter bekamen, welches eingehende Studien erlaubte ...

Aufgaben Versuche mit möglichst einfachen Mitteln, wie sie auch in der Steinzeit zur Verfügung standen, ein genaues Gitter zu zeichnen ♣ Verbinde Gitterpunkte mit Linien zu geometrischen Figuren ♣ Wenn solche Figuren aus parallelen Linien gebildet werden, so sind ihre Flächen zwar von angeschnittenen Häuschen eingerahmt, bestehen aber aus einer ganzen Anzahl Häuschen. Begründe dies ♣ Erfinde Spiele ♣

Mit Ocker bemalte Kiesel aus der Steinzeit (siehe die Bücher von Marie E.P. König) weisen einen oder mehrere Punkte auf und könnten wohl als Zahlensteine gedient haben. Wie wurden sie gebraucht? Vielleicht in Kombination mit Gittern? Lässt sich mit ihrer Hilfe gar eine Art steinzeitlicher "Computer" im Sinne des ersten Kapitels rekonstruieren? Offene archäologische Fragen, die vielleicht zum Spielen animieren. (Ich darf mich an dieser Stelle als Fan der experimentellen Archäologie outen.)

Wie lang sind die Diagonalen eines Quadrates?

Ein Quadrat hat vier gleich lange Seiten und ein Paar gleich langer Diagonalen. Wie lang sind die Diagonalen eines Quadrates von gegebener Seitenlänge? grid Man messe die Diagonalen verschiedener Gitterquadrate und schaue, ob eine Diagonale annähernd ganze Einheiten beträgt. Beim Auszählen und Ausmessen der Quadrate 1x1, 2x2, 3x3, 5x5, 7x7, 10x10, 12x12, 17x17, 24x24, 29x29 ... wird man folgende Zahlen finden:

```
Seite 1   Diagonale zwischen 1 und 2

Seite 2   Diagonale weniger als 3

Seite 3   Diagonale    mehr als 4

---------------------------------

Seite 5   Diagonale    ungefähr 7

Seite  5   Diagonale ein wenig mehr als 7

Seite  7   Diagonale etwas weniger als 10

-----------------------------------------

Seite 12   Diagonale         praktisch 17

Seite 12  Diagonale praktisch 17

Seite 17  Diagonale praktisch 24

--------------------------------

Seite 29  Diagonale praktisch 41
```

Diese Zahlen offenbaren eine Regelmässigkeit und führten mich 1979 zu einer schrägen Säule, deren Bildungsgesetz leicht zu erraten sein sollte:

```
1       1       2

  2       3       4

    5       7       10

      12      17        24
```

```
    29       41        58

      70        99       140   und so weiter
```

Zählt man zwei benachbarte Zahlen einer Zeile zusammen, so erhält man die Zahl darunter. Verdoppelt man die erste Zahl einer Zeile, so erhält man die dritte Zahl derselben Zeile. Misst ein Quadrat 5 mal 5 Einheiten, so betragen seine Diagonalen annähernd 7 Einheiten. Misst ein Quadrat 17 mal 17 Einheiten, so betragen seine Diagonalen praktisch 24 Einheiten. Misst ein Quadrat 70 mal 70 Einheiten, so betragen seine Diagonalen schon sehr genau 99 Einheiten.

Die Seitenlänge eines Quadrates messe 125 Einheiten. Wie lang sind seine Diagonalen? Man gehe so vor:

```
Seite  125  =   99  +  17  +  7  +  2

      140  +  24  + 10  +  3   =  177  Diagonale

Seite  125  =   70  +  41  +  7  +  7

       99  +  58  + 10  + 10   =  177  Diagonale
```

Die Diagonale misst rund 177 Einheiten, der Fehler ist kleiner als eine Viertel-Einheit. Möchte man ein genaueres Ergebnis haben, so verwende man eine Seitenlänge von 1'250 Zehntel-Einheiten, 12'500 Hunderstel-Einheiten, usw.

Auch eine solche Zahlsäule kann man mit jedem beliebigen Zahlenpaar beginnen, zum Beispiel mit 7 und 3, und auch hier sind Fehler erlaubt:

```
 7       3       14

   10       19       20

     29       39       58

       68       97      136

         165      233      330  usw.
```

Misst ein Quadrat 165 mal 165 Einheiten, so betragen seine Diagonalen näherungsweise 233 Einheiten. Es kommt nicht auf die gewählten Anfangszahlen an, und Fehler spielen keine Rolle, wichtig ist allein der Algorithmus, also das Verfahren: verdopple jeweils die erste Zahl einer Zeile, und zähle die benachbarten Zahlenpaare zusammen und schreibe die Summe darunter. Am Beispiel dieser Zahlsäulen können die Schulkinder lernen, was ein Algorithmus bedeutet.

Aufgaben Die ägyptische Königselle zählte 7 Handbreiten. Ein Quadrat messe 10 mal 10 Ellen. Wie lang sind seine Diagonalen in Handbreiten bzw. in Ellen und Handbreiten? ♣ Die Basis der Roten Pyramide von Dahschur mass ursprünglich 420 Ellen mal 420 Ellen. Wie lang war die Diagonale der Basis in Ellen? ♣ Georges Goyon definierte die Form der Cheops-Pyramide folgendermassen: die Höhe verhält sich zur halben Basis wie 14 zu 7, und zur halben Basisdiagonale wie 9 zu 10. Kombiniere die beiden Definitionen. Die Höhe messe 126 Einheiten. Was für Zahlen ergeben sich an der Basis? ♣ Die Babylonier verwendeten die Zahl 1;24,51,10 für die Wurzel 2 (Täfelchen YBC 7289, um 1650 vor Christus), umgerechnet 1 plus 24/60 plus 51/3600 plus 10/216000 = 1,41421296... Wie könnten sie diesen ausgezeichneten Wert gefunden haben? Verlängere die erste Zahlsäule bis zu den Zahlen 985 und 1393, teile die grössere Zahl durch die kleinere, das ergibt auf dem Taschenrechner 1,4142132, überführe die Zahl in die sexagesimale Form (nimm 1 weg, multipliziere den Rest mit 60, nimm 24 weg, multipliziere den Rest mit 60, nimm 51 weg, multipliziere den Rest mit 60, usw.), das ergibt 1; 24,51,10,3,2..., lass die Ziffern ...3,2... weg und behalte 1;24,51,10 ♣ Eudoxus von Knidos soll seine mathematische Ausbildung in Ägypten bekommen haben. Von ihm stammt die sog. Leiter des Eudoxus:

```
1    1
 2    3
  5    7
   12   17
    29   41
     70   99
```

Bestimme den Algorithmus dieser Zahlenleiter ♣

Würfel, gleichseitiges Dreieck, regelmässiges Sechseck

Eine analoge Zahlsäule beginne mit der Zeile 1-1-3, die erste Zahl einer Zeile wird jeweils mit 3 multipliziert, und wenn möglich werden alle drei Zahlen einer Zeile halbiert:

```
1      1      3
 2      4      6
 1      2      3
  3      5      9
    8     14     24
    4      7     12
     11     19      33
       30     52      90
       15     26      45
         41      71     123
          112      194     336
           56       97     168
             ...      ...      ...
```

Ein Würfel messe 41 Einheiten mal 41 Einheiten mal 41 Einheiten. Die Diagonalen der Seitenflächen messen praktisch 58 Einheiten (erste Zahlsäule). Die Raumdiagonalen oder kubischen Diagonalen messen praktisch 71 Einheiten (obige Säule).

Beträgt die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes 30 Einheiten, so misst die Höhe ungefähr 30 Einheiten. / Beträgt die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes 97 Einheiten, so misst die Höhe praktisch 84 Einheiten, der Radius des Umkreises 56 Einheiten, und der Radius des Innenkreises 28 Einheiten.

Aufgaben Die ägyptische Königselle zählte 7 Handbreiten oder 28 Fingerbreiten. Ein Würfel messe 10 Ellen mal 10 Ellen mal 10 Ellen. Bestimme die Länge der Diagonalen der Seitenflächen in Handbreiten und die Länge der Raumdiagonalen in Fingerbreiten. ♣ Die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreieckes messe 97 Fingerbreiten. Wieviel misst die Höhe in Ellen? Wieviel messen die Radien des Umkreises und des Innenkreises in Ellen? ♣ Archimedes verwendete die Verhältnisse 265 / 153 und 1351 / 780 für die Wurzel 3. Wie könnte er seine Zahlen gefunden haben? Verlängere die obige Säule ...♣

Doppelquadrat

Eine weitere Zahlsäule in Wabenform erlaubt die Berechnung des Doppelquadrates

```
 1        1        5

   2        6       10

   1        3        5

     4        8       20

     2        4       10

     1        2        5

       3        7       15

         10       22       50

          5       11       25

           16       36       80

            8       18       40

            4        9       20

             13       29       65

               42       94      210

               21       47      105

                 68      152      340

                 34       76      170

                 17       38       85

                   55      123      275

                     178      398      890
```

```
89     199     445
  288     644    1440
  144     322     720
   72     161     360
     ...     ...
```

Misst ein Rechteck 4 mal 8 Einheiten, so betragen seine Diagonalen annähernd 9 Einheiten. Misst ein Rechteck 17 mal 34 Einheiten., so betragen seine Diagonalen ziemlich genau 38 Einheiten. Misst ein Rechteck 72 mal 144 Einheiten, so betragen seine Diagonalen praktisch 161 Einheiten.

Aufgabe In der obigen Säule sind drei goldene Zahlfolgen enthalten. Wer findet sie? ♣

Der Altar von Delos (ein Volumen verdoppeln)

Plutarch von Chairona (der im ersten und zweiten nachchristlichen Jahrhundert lebte) berichtet in einer Dramatisierung, wie Plato und Simmias von Theben im Jahr 379 vor Christus von einer Ägyptenreise heimkehren (es folgt meine Übersetzung des englischen Zitates in der Mathematik-Geschichte von Victor J. Katz - an sich eine Sünde, man sollte immer das Original konsultieren, aber item): Als wir von Ägypten heimkehrten, begegnete uns eine Schar Delier und fragte Plato, ob er als Geometer ein Problem lösen könne das ihnen Apollo in einem sonderbaren Orakel aufgegeben habe. Das Orakel ging so: Die gegenwärtigen Probleme der Delier und der übrigen Griechen würden aufhören, wenn sie den Altar von Delos verdoppelten. Da sie den Sinn dieser Worte nicht zu ergründen vermochten und beim Bauen eines neuen Altares kläglich scheiterten, fragten sie Plato um Rat. Dieser meinte, dass sich Apollo über die Griechen lustig mache, weil es ihnen an Bildung fehle. Keine gewöhnliche kurzsichtige Intelligenz könne dieses Problem lösen, nur ein versierter Geist (one well versed in the subject) wäre fähig, zwei mittlere Proportionen zu finden (two mean proportionals), mit deren Hilfe das Volumen eines kubischen Körpers unter Beibehaltung seiner Form verdoppelt werden könne. Eudoxus von Knidos wäre in der Lage, ihnen zu helfen. Es sei aber anzunehmen, dass es dem Gott nicht eigentlich um diese Aufgabe gehe, vielmehr wolle er, dass ganz Griechenland den Krieg aufgebe und stattdessen die Musen pflege und die Leidenschaften über das Studium mathematischer Probleme und über das praktische Ausüben der geometrischen Künste zähme, auf dass das allgemeine Zusammenleben nicht schädlich sondern förderlich sei. - Eudoxus von Knidos (der wie oben gesagt seine mathematische Ausbildung in Aegypten bekam) erlöste die Delier, indem er das Volumen des Altares im Heiligtum von Delos verdoppelte. Wie mag er vorgegangen sein? Er könnte wohl das folgende Zahlenmuster verwendet haben, das zwischen Eckwerten der Form a und 2a tatsächlich zwei mittlere Proportionen aufweist, wobei der Fehler mit zunehmender Zeilenzahl immer kleiner wird. Man gehe vor wie bei den obigen Säulen, kürze aber regelmässig mit 3:

```
1       1       1       2
  2       2       3       4
    4       5       7       8
      9      12      15      18
```

```
        3       4       5       6
   3       4       5       6
     7       9      11      14
       16      20      25      32
         36      45      57      72
         12      15      19      36
   12      15      19      24
     27      34      43      54
       61      77      97     122
        138     174     219     276
         46      58      73      92
   46      58      73      92
    104     131     165     208
      235     296     373     470
        531     669     843    1062
        177     223     281     354
  177     223     281     354
    400     504     635     800   und so weiter
```

Die Kante eines Würfels betrage 4 Meter oder 400 Zentimeter. Verdoppelt man sein Volumen, so misst die neue Kantenlänge praktisch 504 Zentimeter (genau 503.968... cm).

Möchte man ein beliebiges Volumen verdoppeln, so verlängere man alle Kanten um den Faktor 504/400 = 126/100 = 63/50 = 1,26 (Dezimalbruch) = 1 1/4 1/100 (Stammbrüche) oder 1 '4 '100 (Stammbrüche in meiner einfachen Notation).

Aufgabe Ein Quader messe 46 mal 58 mal 73 Zentimeter. Verdopple sein Volumen unter Beibehaltung seiner Form. Ergebnis: 58 mal 73 x 92 Zentimeter. Prüfe das Ergebnis mit einem Taschenrechner ♣

Das Heilige Dreieck 3-4-5

Beim Ausmessen von Gitterdiagonalen kommt man früher oder später auf eine bemerkenswerte Einsicht: misst ein Rechteck 3 mal 4 Einheiten, so betragen seine Diagonalen 5 Einheiten Sacred Triangle Halbiert man ein solches Rechteck längs einer Diagonale, so erhält man zwei Dreiecke der Seitenlängen 3-4-5 Einheiten.

Stimmt die Länge der Diagonale genau? Oder nur fast genau? Sehen wir die folgende Zeichnung an. In einen Rasterplan sind zwei gleich grosse Quadrate eingefügt. Ihre Seiten messen je 7 Einheiten und sind in 3 plus 4 Einheiten beziehungsweise in 4 plus 3 Einheiten gegliedert. Gerade und schräge Linien verbinden die Teilungspunkte. So entstehen zwei Rechtecke und zwei Quadrate (links) bzw. ein schräges Quadrat und vier Dreiecke (rechts) proof 1

Ein Rechteck misst 3 mal 4 gleich 12 Häuschen, beide Rechtecke zusammen haben eine Fläche von 24 Häuschen. Die Katheten der Dreiecke messen 3 und 4 Einheiten. Zwei Rechtecke zusammen ergäben ein Rechteck von 3 mal 4 Einheiten und einer Fläche von 12 Häuschen. Die beiden Rechtecke und die vier Dreiecke haben zusammen je die gleiche Fläche: 24 Häuschen. / Die Flächen der beiden grossen Quadrate zählen je 7 mal 7 gleich 49 Häuschen. Ziehen wir die 24 Häuschen ab, so bleiben 25 Häuschen für die beiden kleinen Quadrate links und für das schräge Quadrat rechts. Die Seitenlängen der linken Quadrate und die Katheten der Dreiecke messen je 3 und 4 Einheiten. Wie lang ist die Seite des schrägen Quadrates, mithin die Hypotenuse eines Dreieckes? Die Fläche des schrägen Quadrates beträgt 25 Häuschen. 5 mal 5 gibt 25, also beträgt die Seitenlänge des schrägen Quadrates und Hypotenuse der vier Dreiecke 5 Einheiten. Genau 5 Einheiten.

Wie verhält es sich, wenn wir die Seiten der grossen Quadrate anders teilen? In gewissen Fällen ergibt sich wieder eine genaue ganzzahlige Lösung, etwa in den Fällen 5 und 12, oder 8 und 15, oder 20 und 21, ... Die entsprechenden Diagonalen oder Hypotenusen messen dann genau 13, 17, 29 ... Einheiten.

Wie verhält es sich, wenn wir die Seiten der grossen Quadrate allgemein in die Strecken a und b teilen? In diesem Fall ergeben sich folgende Flächen: grosses Quadrat (a+b)(a+b), Rechteck ab, Summe der Rechtecke 2ab, Dreieck ab/2, Summe der Dreiecke 2ab, kleine Quadrate aa und bb, zusammen aa + bb, schräges Quadrat gleich Summe der kleinen Quadrate gleich aa + bb proof 2

Dies führt zu einer berühmten Formel, die nach Pythagoras benannt ist, aber schon lange vor dem Aufblühen der klassischen griechischen Zivilisation in Gebrauch war: in einem rechtwinkligen Dreieck der Seitenlängen a-b-c gilt die Formel aa + bb = cc. Das einfachste Beispiel wäre das sogenannte Heilige Dreieck 3-4-5, denn 3x3 plus 4x4 gibt 5x5.

Die Formel gilt in erweiterter Form auch für Quader. Misst ein solcher a mal b mal c Einheiten und messen seine Diagonalen d Einheiten, so gilt die Formel aa + bb + cc = dd. Das einfachste Beispiel wäre ein Quader der Masse 1 mal 2 mal 2 Einheiten: seine kubischen Diagonalen messen genau 3 Einheiten, denn 1x1 plus 2x2 plus 2x2 gleich 3x3.

Das Dreieck der Seitenlängen 3-4-5 soll im alten Ägypten Heiliges Dreieck geheissen haben. Woher dieser eigenartige Name? Wie im folgenden Kapitel gezeigt werden soll, ist dieses geometrische Figur der Schlüssel zum einfachsten Verfahren der systematischen Kreisberechnung, und wenn wir bedenken, dass der Sonnengott Re als kleiner Kreis dargestellt worden war - Abbild der kreisrunden Sonnenscheibe -, und wenn wir ferner bedenken, dass im alten Ägypten alle Eigenschaften einer Person wie auch ihr Name, ihre Körperfarbe und sogar ihr Schatten zu ihrem Wesen gezählt wurden, so darf man wohl in einem Schlüssel zum Wesen der obersten Gottheit eine heilige Figur erblicken ...

Aufgaben Die Zahlsäule für die Berechnung des Quadrates liefert die Tripel 1-1-1, 1-1-2, 2-2-4, 3-3-4, 5-5-7, 7-7-10, 12-12-17, 17-17-24, 29-29-41, 41-41-58, 70-70-99, 99-99-140. Wende die obige Formel auf diese Zahlen an. Der Fehler beträgt jeweils 1. Die Fehler bilden ein wiederkehrendes Muster. Finde dieses Muster ♣ Die Basis der Roten Pyramide mass 420 Ellen, die Höhe 200 Ellen. Wie lang war die schräge Höhe? ♣ Jean-Philippe Lauer fand in den Massen der Königskammer der Cheops-Pyramide ein Heiliges Dreieck. Die Kammer hat folgende Masse: Breite 10 Ellen, Länge 20 Ellen, Diagonale der Stirnwand 15 Ellen, Raumdiagonale 25 Ellen. Finde das Heilige Dreieck ♣ Die Basis der Chefren-Pyramide mass 411 Ellen, die Höhe 274 Ellen. Finde das Heilige Dreieck dieser Pyramide ♣ Ahmes erwähnt im Papyrus Rhind mehrere Pyramiden. Eine von ihnen hat eine Basis von 140 Ellen und eine Höhe von 93 1/3 Ellen, eine andere eine Basis von 12 Ellen und eine Höhe von 8 Ellen. Finde das Heilige Dreieck dieser Pyramiden ♣ Auf dem babylonischen Täfelchen Plimpton 322 sind 15 Tripel vermerkt, allerdings fehlt jeweils die kleinste Zahl. Finde die fehlenden Zahlen. Hier die 15 unvollständigen Tripel in der originalen Reihenfolge: ( )-119-169, ( )-3367-4825, ( )-4601-6649, ( )-12'709-18'541, ( )-65-97, ( )-319-481, ( ) 2291-3541, ( )-799-1249, ( )-481-769, ( )-4961-8161, ( )-45-75, ( )1679-2929, ( )-161-289, ( )-1771-3229, ( )-56-106 ♣

Re hat viele Namen (den Kreis berechnen)

Die ägyptische Königselle zählt 7 Handbreiten oder 28 Fingerbreiten. Man denke sich ein Quadrat von 10 auf 10 Ellen oder 70 auf 70 Handbreiten oder 280 auf 280 Fingerbreiten. Seine Diagonalen messen praktisch 99 Handbreiten. Man unterteile das Quadrat in 10 mal 10 Häuschen, deren Seitenlängen je eine Elle oder 7 Handbreiten oder 28 Fingerbreiten messen. Dann zeichne man einen Kreis um die Quadratmitte. Die Peripherie gehe durch die vier Enden der Achsen (a d g j). Der Radius misst 5 Ellen oder 35 Handbreiten oder 140 Fingerbreiten. Der Kreis passiert nicht nur die vier Achsenenden sondern auch acht innere Gitterpunkte , deren Abstände von den Achsen und von der Kreismitte 3, 4 und 5 Ellen messen (b c e f h i k l):

```
. . . . . d . . . . .

. . e . . . . . c . .

. f . . . . . . . b .

. . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . .

g . . . . + . . . . a

. . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . .

. h . . . . . . . l .

. . i . . . . . k . .

. . . . . j . . . . .
```

Die 12 Punkte a-b-c-d-e-f-g-h-i-j-k-a markieren einen Kreis. Die kurzen Bögen b-c e-f h-i k-l messen praktisch 40 Fingerbreiten, die längeren Bögen a-b c-d d-e f-g g-h i-j j-k l-a messen praktisch 90 Fingerbreiten. Der Umfang misst praktisch 880 Fingerbreiten oder 220 Handbreiten. Teilt man ihn durch den Durchmesser 70 Handbreiten, so erhält man den ausgezeichneten Näherungswert 22/7 für π.

Die obige Figur basiert auf dem Heiligen Dreieck 3-4-5 und ist der Schlüssel zu einem mathematischen Verfahren. - Man denke sich ein Quadratgitter, das 10 mal 10, 50 mal 50, 250 mal 250, 1250 mal 1250 ... immer feinere Quadrate zählt. Je feiner das Gitter, desto mehr Punkte liegen auf dem Kreis. Die Enden der Achsen geben 4 Kreispunkte vor. 8, 16, 24, 32 ... weitere Kreispunkte werden von dieser Tripelfolge definiert:

```
3-4-5   15-20-25   75-100-125   375-500-625   ...

     7-24-25   35-120-125   185-600-625   ...

           44-117-125   220-585-625   ...

                  336-527-625   ...
```

Kennt man ein Tripel a-b-c und möchte man das Folgetripel finden, so berechne man die Terme

plus/minus 4b plus/minus 3a   plus/minus 3b plus/minus 4a   5c

und wähle im Fall der plus/minus Terme die positiven Resultate, die auf 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 oder 9 enden (weder auf 0 noch 5). Verbindet man die Kreispunkte mit Geraden, so erhält man eine Folge ungleichseitiger Polygone, die sich mehr und mehr von Innen her dem Kreis anschmiegen.

key figure 1 / key figure 2 / polygon 1 / polygon 2 / polygon 3 / polygon 4 / polygon 5 // polygon a / polygon b / polygon c / polygon d

Die Polygone haben eine sehr bemerkenswerte Eigenschaft: ihre Seitenlängen sind ganzzahlige Vielfache der Quadratwurzeln von 2, 5 und/oder 2x5. Die Wurzeln von 2 und 5 können wir sehr einfach mit zwei der oben vorgestellten Zahlsäulen approximieren. Somit haben wir ein vollständiges Verfahren der Kreisberechnung beisammen. Es ist ein langsames Verfahren, das zu sehr langen Zahlen führt, es liefert aber ein paar sehr gute Näherungswerte für die Kreiszahl π. - Bedenken wir, dass die Bögen immer etwas länger sind als die Seiten der Polygone. Wir können dies in etwa ausgleichen, indem wir solche Werte für die Wurzeln von 2 und 5 verwenden, die etwas grösser sind als die eigentlichen Werte, zum Beispiel 10/7 und 17/12 für die Wurzel 2 und 9/4 für die Wurzel 5:

```
10/7  mal 10/7   gleich  100/49   etwas mehr als 2

17/12 mal 17/12  gleich  289/122  etwas mehr als 2

 9/4  mal  9/4   gleich   81/16   etwas mehr als 5
```

Berechnet man das erste Polygon mit 10/7 und 9/4 und das zweite Polygon mit 17/12 und 9/4, so erhält man die Näherungen 22/7 und 157/50 für π. Diese beiden sehr guten ersten Näherungswerte haben einen Mittelwert bei ungefähr 311/99. - Der Wert 22/7 gehört einer Zahlenfolge an, die man sehr einfach gewinnen kann. Π ist kleiner als 4 aber etwas grösser als 3. Also schreibe man 4 über 1 und addiere fortlaufend 3 über 1:

```
4  (plus 3)  7  10  13  16  19  22  25  28
```

```
  1   (plus 1)   2    3    4    5    6    7    8    9
```

Die Werte 22/7, 157/50 und 311/99 kommen in einer weiteren Sequenz vor. Man schreibe 2 über 1 und addiere fortlaufend 22 über 7:

```
 3   (plus 22)   25   47   69   91   113   135   157   179   201   223

 1   (plus  7)    8   15   22   29    36    43    50    57    64    71

           245   267   289   311   333   355   377   399

            78    85    92    99   106   113   120   127
```

Eine berühmte Formel im Papyrus Rhind besagt, dass ein Quadrat von der Seitenlänge 8 und ein Kreis vom Durchmesser 9 praktisch dieselbe Fläche haben. Dies führt auf den Näherungswert 256/81 für π. Auch dieser Wert gehört einer Zahlfolge an:

```
 9   (plus 19)   28 47 66 85 104 123 142 161 180 199 219 237 256

 3   (plus  6)    9 15 21 27  33  39  45  51  57  63  69  75  81
```

Wir modernen Menschen (Angehörige des frühen Betonzeitalters ;-) verwenden Zahlen mit möglichst vielen Stellen: Goldene Zahl Φ = 1,6180339..., Wurzel 2 = 1,4142135..., Kreiszahl π = 3,1415926... Eine andere ebenso gültige Weise mit irrationalen Zahlen umzugehen wäre verschiedene einfache Näherungswerte zu gebrauchen, handliche Werte für eine gegebene Rechnung auszuwählen und darauf zu vertrauen, dass sich die Fehler in etwa ausgleichen. - Will man die Kreiszahl mit Re, verbinden, so darf man erwähnen, dass er viele Namen hatte während niemand seinen wahren Namen kannte ...

Aufgaben Bilde weitere π-Folgen ♣ Umgib ein Quadrat von 10 mal 10 Ellen mit einem Kreis. Wie lang ist der Kreisumfang in Handbreiten? ♣ Ein Rechteck messe 72 mal 96 Fingerbreiten. Umgib es mit einem Kreis und berechne dessen Umfang ♣ Ein Rechteck messe 14 mal 16 Handbreiten. Umgib es mit einem Kreis und berechne dessen Fläche ♣

Der Zauberstab

Man kombiniere eine Königselle der Länge 52,36 cm mit einem komplementären Mass, das ich Horus-Elle oder Zauberstab oder einfach Stab nenne. 7 Ellen entsprechen 11 Stäben. Ein Stab misst 33,32 cm. Die beiden kombinierten Masse erlauben sehr einfache und dabei verblüffend genaue Definitionen: Eine Strecke messe 5 Ellen, der goldene Minor misst praktisch 3 Stäbe ● Die Seite eines Quadrates messe 10 Stäbe oder 9 Ellen, seine Diagonalen messen praktisch 9 Ellen oder 20 Stäbe ● Der Durchmesser eines Kreises betrage einen Stab, der Umfang misst praktisch zwei Ellen ● Der Radius eines Kreises betrage einen Stab, die Fläche misst praktisch einen Stab mal zwei Ellen ● Der Durchmesser einer Kugel betrage einen Stab, die Oberfläche misst praktisch einen Stab mal zwei Ellen ● Der Durchmesser einer Kugel betrage einen Stab, das Volumen dreier Kugeln misst praktisch einen Stab mal eine Elle mal eine Elle ●

Gemäss Rainer Stadelmann (ehemaliger erster Direktor des Deutschen Archäologischen Institutes Kairo) wurde die Basis der Cheops-Pyramide beinahe unwahrscheinlich genau ausgemessen: die grösste Höhendifferenz beträgt lediglich 2,1 cm oder 21 mm, die Abweichung der südlichen Basis von den idealen 440 Ellen nur 1,2 cm oder 12 mm, jene der nördlichen Basis 3,2 cm oder 32 mm. Wie war eine solche Genauigkeit zu erreichen, erst noch unter Umgehung des Felshügels in der Mitte der Pyramidenbasis, welcher das Ausmessen der Diagonalen verhinderte? Meiner Meinung nach kommt nur eine Methode in Frage. Man ebne das Gelände um den Felshügel und lege ein provisorisches Gitter aus, Abstand der Gitterpunkte 9 Ellen (471.24 cm) resp. 20 Stäbe (666.4 cm). Man stelle auf jeden erreichbaren Gitterpunkt einen Block aus Kalkstein und befestige auf jedem Block ein Stück Holz. Danach vermesse man die Höhen der Blöcke mithilfe einer grossen Setzwaage und schleife alle Holzstücke auf dieselbe Höhe ab. Man prüfe die Höhen, indem man die Waage umdrehe. Anschliessend fertige man ein ebenso leichtes wie stabiles Holzkreuz an und versehe es mit vier Nägeln a b c d:

```
    a                   d


  d   +   b          c   +   a


    c                   a
```

```
Abstände ab = bc = cd = da = 20 Stäbe  (666,4 cm)

Abstände ab = cd = 9 Ellen  (471,42 cm)
```

Man lege das Holzkreuz auf vier Blöcke und markiere diese mit den Nägeln. Dann drehe man das Kreuz und prüfe die Marken. Passen die Nägel des gedrehten Kreuzes hinein, so gelten die Marken; andernfalls prüfe man die Position der Nägel an einem in Stein geritzen Referenzkreuz. Die Basis der Cheops-Pyramide mass 440 Ellen, das erforderliche Gitter zählte 50 mal 50 Quadrate mit einer gesamten Fläche von 450 mal 450 Ellen.

Aufgabe Die einstige Basis der Cheops-Pyramide mass 440 Ellen, ihre Höhe 280 Ellen. Diese Höhe entspräche 440 Stäben. Ein Modell dieser Pyramide kann man so bemessen: Basis 1 Elle, Höhe 1 Stab. Zeichne den Querschnitt (Basis 52,36 cm, Höhe 33,32 cm) und berechne seine Fläche mit Stab und Elle Die Höhe sei der Durchmesser eines Kreises. Zeichne den Kreis und berechne seine Fläche mit Stab und Elle ♣

Stammbrüche

Die Ägypter gelten als Erfinder der Stammbrüche in der Form 1/a 1/b 1/c oder einfach 'a 'b 'c in meiner Notation. - Die Wurzel 2, das Verhältnis der Diagonale zur Seite eines Quadrates, können wir mit 99/70 annähern und den Bruch auf die folgende Weise in Stammbrüche überführen:

```
99     70 + 14 + 10 + 7     297     210 + 70 + 14 + 3

--  =  ----------------  =  ---  =  -----------------

70            70            210             210
```

Mit Kürzen findet man die Reihen 1 '5 '7 '14 und 1 '5 '7 '14. Selbst in meiner vereinfachten Schreibweise ist das eine umständliche Art, den Bruch 99/70 anzugeben. So haben denn die ägyptischen Stammbrüche einen schlechten Ruf: sie gelten als kompliziert und umständlich. Sind sie es auch? Ich probierte mit ihnen zu arbeiten und entdeckte, dass man mit diesen sonderbaren Reihen sehr leicht multiplizieren kann, wenn man ganz einfach alle Zwischenergebnisse rundet - die Fehler gleichen sich mehr oder weniger aus, die Fehler sind überraschend klein, man kann bequem mit ganzen Zahlen arbeiten und braucht als Hilfsmittel lediglich Multiplikationstabellen oder ein Rechenbrett wie im ersten Kapitel vorgeschlagen. - Ein Beispiel. Die Basis der Chefren-Pyramide mass 411 Ellen. Wie lang war die Diagonale des Basisquadrates? Ich multipliziere 411 mit 1, dann mit '5, dann mit '7, dann mit '14 und runde die Zahlen:

```
411 x 1    =  411

411 x '5   =   82 (abgerundet)

411 x '7   =   59 (aufgerundet)

411 x '14  =   29 (abgerundet)

-----------------

Summe         581
```

Die Diagonale mass 581 Ellen, mit einem Fehler von 13 Zentimetern.. Wenn wir es genauer wissen möchten, verwandeln wir die 411 Ellen in 2877 Handbreiten und stellen wieder dieselbe Rechnung an:

```
2877 x 1    =  2877

2877 x '5   =   575 (abgerundet)

2877 x '7   =   411

2877 x '14  =   205 '2  ??
```

Hier haben wir ein Problem: sollen wir '2 aufrunden oder abrunden? Keins von beidem, wir verwenden stattdessen die alternative Reihe 1 '3 '15 '70:

```
2877 x 1    =  2877

2877 x '3   =   959

2877 x '15  =   192 (aufgerundet)

2877 x '70  =    41 (abgerundet)

-------------------

Summe          4069
```

Die Diagonale mass 4069 Handbreiten, mit einem Fehler von nur noch 23 Millimetern. Wenn wir es noch genauer haben wollen, verwandeln wir die 2877 Handbreiten in 11'508 Fingerbreiten und gehen wieder gleich vor:

```
11508 x 1    =  11508

11508 x '3   =   3836
```

```
11508 x '15  =    767 (abgerundet)

11508 x '70  =    164 (abgerundet)

---------------------

Summe           16275
```

Demnach mass die Diagonale der Basis der Chefren-Pyramide 16'275 Fingerbreiten (581 Ellen 7 Fingerbreiten oder 581 1/4 Ellen), mit einem Fehler von nur noch 4 (vier) Millimetern.

Wieviel gibt 184 mal 2 '6 '7 mal 5 '3 '5 ?

```
 184 mal 2 '6 '7  gleich   368   31   26  =   425

 425 mal 5 '3 '5  gleich  2125  142   85  =  2352

 184 mal 5 '3 '5  gleich   920   61   37  =  1018

1018 mal 2 '6 '7  gleich  2036  170  145  =  2351
```

Ergebnisse 2351 und 2352, Mittelwert 2351 '2, Fehler kleiner als ein Zehntel.

```
 317 mal 3 '3 '11  gleich   951  106   29  =  1086

1086 mal 4 '5 '13  gleich  4344  217   84  =  4645

 317 mal 4 '5 '13  gleich  1268   63   24  =  1355

1355 mal 3 '3 '11  gleich  4065  452  123  =  4640
```

Ergebnisse 4640 und 4645, Mittelwert 4642 '2, Fehler kleiner als ein Dreissigstel.

Wieviel gibt 5 '3 '7 '11 mal 5 '3 '7 '11? Diesmal multiplizieren wir das Produkt mit einem Faktor von 100 und teilen das Ergebnis wieder durch 100:

```
100 mal 5 '3 '7 '11  gleich   500   33  14   9  =   556

556 mal 5 '3 '7 '11  gleich  2780  185  79  51  =  3095
```

3095 durch 100 gibt praktisch 31, genaues Ergebnis 30,992598..., Fehler kleiner als 1/135.

Ich habe viele solcher Multiplikationen ausgeführt und kam immer auf ein brauchbares, meist ein sehr gutes Ergebnis. Also wollte ich schauen, wie weit ich gehen kann und ersann die folgende Aufgabe. Jemand bringe die Summe von 68'954 Franken (die erstbeste Zahl die mir einfiel) auf die Bank. Diese gewähre einen Zins von '101 '202 '303 '606 (eine Zahl aus dem Papyrus Rhind). Wie steigt das Vermögen bis im Jahr 15 an?

```
Jahr 1   Vermögen  68'954   Zins  683 341 228 114  =  1'366

Jahr 2   Vermögen  70'320   Zins  696 348 232 116  =  1'392

Jahr 3   Vermögen  71'712   Zins  710 355 237 118  =  1'420

Jahr 4   Vermögen  73'132   Zins  724 362 241 121  =  1'448

Jahr 5   Vermögen  74'580   Zins  738 369 246 123  =  1'476
```

```
Jahr 6   Vermögen  76'056   Zins  753 377 251 126  =  1'507

Jahr 7   Vermögen  77'563   Zins  768 384 256 128  =  1'536

Jahr 8   Vermögen  79'099   Zins  783 392 261 131  =  1'567

Jahr 9   Vermögen  80'666   Zins  799 399 266 133  =  1'597

Jahr 10  Vermögen  82'263   Zins  814 407 271 136  =  1'628

Jahr 11  Vermögen  83'891   Zins  831 415 277 138  =  1'661

Jahr 12  Vermögen  85'552   Zins  847 424 282 141  =  1'694

Jahr 13  Vermögen  87'246   Zins  864 432 288 144  =  1'728

Jahr 14  Vermögen  88'974   Zins  881 440 294 147  =  1'762

Jahr 15  Vermögen  90'736
```

Im Jahr 15 beträgt das Vermögen 90'736 Franken. Und welches wäre der genaue Betrag? 68'954 mal (1 + 2/101) hoch 14 gleich 68'954 mal 1,3158971... gleich 90'736,365... Franken. Obschon wir alle Zahlen gerundet haben, beträgt der Fehler nicht einmal 40 Rappen, und wenn wir mit einer Summe von 6'895'400 Rappen begännen, so wäre er kleiner als 4 (vier) Rappen.

Ein kurzer Weg zur Kreiszahl π

```
              ○                      ○.○.○.○.○.○.○.○

            ○ ○ ○                     ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

          ○ ○ ○ ○ ○                    ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

        ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○                   ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

      ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○                  ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

    ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○                 ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

  ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○                ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○               ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
```

Die Zeilen der obigen Pyramide geben die ungeraden Zahlen vor: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ... Jede solche Pyramide lässt sich in ein Quadrat derselben Höhe und derselben Fläche bzw. Anzahl Steinchen umwandeln. Die ausgeführte Pyramide hat eine Höhe von 8 Einheiten, die Seitenlänge des Quadrates misst ebenfalls 8 Einheiten, und beide Figuren bestehen aus 8 mal 8 gleich 64 Steinchen. Aus 64 Würfeln könnte man einen neuen Würfel zusammenstellen, dessen Kantenlänge 4 Einheiten und dessen Volumen 4 mal 4 mal 4 gleich 64 Kubikeinheiten misst. Mit 64 Steinchen kann man viele Muster auslegen, zum Beispiel diese hier:

```
 ○       ○       ○       ○       ○       ○       ○       ○

○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○
○   ○
```

○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○
○   ○

 ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○
○   ○

  ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○

○ ○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

 ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○   ○   ○   ○   ○
○   ○   ○   ○   ○

○ ○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

 ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○   ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○

 ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○   ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○

 ○   ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○

○   ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
○ ○ ○

Eine weitere Möglichkeit, 64 Steinchen auf regelmässige Weise auszulegen: in einer Linie, die man so oft als möglich halbiert:

○○

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○ ○○○○○○○○

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○ ○○○○ ○○○○

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○ ○○○○ ○○ ○○

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○○○○○○○○○ ○○○○○○○○ ○○○○ ○○ ○
○

In Zahlen:

64 = 64

64 = 32 + 32

64 = 32 + 16 + 16

64 = 32 + 16 + 8 + 8

```
64 = 32 + 16 + 8 + 4 + 4

64 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 2

64 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1
```

Ich teile sämtliche Zahlen durch 64, kürze die Brüche und schreibe die resultierenden Stammbrüche auf meine Weise:

```
1 = '1

1 = '2 '2

1 = '2 '4 '4

1 = '2 '4 '8 '8

1 = '2 '4 '8 '16 '16

1 = '2 '4 '8 '16 '32 '32

1 = '2 '4 '8 '16 '32 '64 '64
```

Damit haben wir die berühmte ägyptische Reihe des Horus-Auges gefunden: 1 = '2 '4 '8 '16 '32 '64 (...) oder, in Faktoren gegliedert:1 = '2 '2x2 '2x2x2 '2x2x2x2 '2x2x2x2x2 '2x2x2x2x2x2 (...) Sowohl die Zahlentreppe wie auch die Reihe lassen sich ins Unendliche fortführen.

Ein Auge des Horus war der Mond, sein anderes Auge war die Sonne. Wenn es eine zweite Reihe des Horus-Auges gegeben haben sollte, könnte es wohl diese hier gewesen sein:

```
60 = 60

60 = 30 + 30

60 = 30 + 10 + 20

60 = 30 + 10 + 5 + 15

60 = 30 + 10 + 5 + 3 + 12

60 = 30 + 10 + 5 + 3 + 2 + 10

1 = '1

1 = '2 '2

1 = '2 '6 '3

1 = '2 '6 '12 '4

1 = '2 '6 '12 '20 '5

1 = '2 '6 '12 '20 '30 '6

1 = '1

1 = '1x2 '2
```

```
1 = '1x2 '2x3 '3

1 = '1x2 '2x3 '3x4 '4

1 = '1x2 '2x3 '3x4 '4x5 '5

1 = '1x2 '2x3 '3x4 '4x5 '5x6 '6
```

Auch diese Zahlentreppe kann man beliebig weiterführen. Sie resultiert in einer schönen Reihe mit einer faszinierenden Teilreihe:

```
1 = '1x2 '2x3 '3x4 '4x5 '5x6 '6x7 '7x8 '8x9 ...

  '1x2 '2x3           '5x6 '6x7            ... = π/4
```

Aus der Teilreihe gewinnt man mit Umformen der Doppelglieder eine neue Reihe, in der die Folge der ungeraden Zahlen zu Ehren kommt:

```
π/8  =  '1x3 '5x7 '9x11 '13x15 '17x19 '21x23 '25x27 ...
```

Diese Reihe lässt sich in die berühmte Reihe von Gregory und Leibniz umwandeln, die allerdings schon dem indischen Mathematiker Madhavan (1340 bis 1425) bekannt war:

```
π/4  =  1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 ...
```

Ein magischer Quader (Aufgabe Nummer 32 des Papyrus Rhind)

Der Schreiber Ahmes teilt 2 durch 1/13 1/4 und bekommt 1 1/6 1/12 1/114 1/228:

2 durch 1 '3 '4 gleich 1 '6 '12 '114 '228

Anfänger lernen an diesem Beispiel mit Stammbrüchen umzugehen. Fortgeschrittene mögen eine anspruchsvollere Aufgabe lösen: Ein Quader messe 2 Einheiten mal 1 '3 '4 Einheiten mal 1 '6 '12 '114 '228 Einheiten. Wie lang sind die kubischen Diagonalen dieses Quaders? Ganz einfach

```
 1 '3 '4  Einheiten   plus  1 '6 '12 '114 '228  Einheiten
```

oder

```
 1 1  plus  '3 '6  plus  '4 '12  plus  '114 '228  Einheiten
```

oder

```
  2           '2           '3                '76  Einheiten
```

Ahmes könnte wohl im Magazin seiner Schule einen Quader dieser Masse verwahrt haben, auf dem die Zahlen eingetragen waren und auf dem ein Textlein wie das Folgende stand: Teile 2 durch eine beliebige Zahl a, so bekommst du b. Die Höhe eines Quaders messe 2 Einheiten, die Länge oder Breite a Einheiten, die Breite oder Länge b Einheiten. Die Basis misst ab Quadrateinheiten, das Volumen 2ab Kubikeinheiten, und die Raumdiagonalen messen a+b Einheiten.

Aufgabe Ein Kornspeicher in Form eines "magischen Quaders" habe ein Volumen von 500 Kubikellen. Finde vernünftige Masse für den Speicher in Ellen, Handbreiten oder Fingerbreiten ♣

Eine Lösung dieser Aufgabe wäre ein Kornspeicher mit den Innenmassen 49-50-70 Handbreiten und einer kubischen Diagonale von genau 99 Handbreiten. Ändern wir diese Masse ein wenig ab, so bekommen wir noch einfachere Zahlen: Innenhöhe 10 Ellen oder 70 Handbreiten oder 280 Fingerbreiten, Innenbreite gleich Innenlänge, nämlich 198 Fingerbreiten, Raumdiagonale praktisch 396 Fingerbreiten oder 99 Handbreiten. Einen solchen Speicher mit dem Fassungsvermögen von praktisch 500 Kubikellen kann man sehr einfach mithilfe einer Knotenschnur ausmessen:

```
   Breite       Länge          Höhe

 o-----------o-----------o----------------o

    99          99             140

       198                  140

 o-----------------------o----------------o

     Raumdiagonale        Diagonale Basis
```

Mein Schlüssel für das Verstehen der ägyptischen Symbole:

einfach aber komplex

Mein Schlüssel für das Verstehen der ägyptischen Mathematik:

einfach aber clever

Diese Motto könnte auch für den Mathematik-Unterricht gelten: die ersten Methoden sollten ganz einfach sein, so dass alle Kinder sie leicht begreifen, und gleichzeitig mögen es clevere Methoden sein, welche die Kinder zum Spielen einladen, ihre Neugier wecken.

Ein Getreidemass (Aufgabe Nummer 38 des Papyrus Rhind)

Das altägpytische Längenmass war auf eine besondere Weise gegliedert. Eine Königselle mass in der Pyramidenzeit 52,36 cm, im Neuen Reich 52,5 cm und zählte 7 Handbreiten oder 28 Fingerbreiten oder 56 Re-Marken oder 84 Schu-Marken oder 112 Tefnut-Marken oder 140 Geb-Marken oder 168 Nut-Marken oder 196 Osiris-Marken oder 224 Isis-Marken oder 252 Seth-Marken oder 280 Nephtys-Marken oder 308 Horus-Marken oder 336 Imsety-Marken oder 364 Hapy-Marken oder 392 Duamutf-Marken oder 420 Kebsenuf-Marken oder 468 Thoth-Marken (Königselle Amenhoteps, Ägyptisches Museum Turin).

In Aufgabe Nummer 38 des Papyrus Rhind notiert Ahmes eine sonderbare Gleichung:

1 Hekat mal 3 '7 mal '22 von 7 gleich 1 Hekat

Ein Hekat war ein Hohlmass für Getreide. 30 Hekat waren eine Kubikelle. 1 Hekat lässt sich als ein quaderförmiger Hohlraum der folgenden Masse definieren: eine halbe Königselle mal eine Drittel Königselle mal eine Fünftel Königselle:

'2 Elle mal '3 Elle mal '5 Elle gleich 1 Hekat

Die feineren Masseinheiten erlauben weitere Definitionen eines quaderförmigen Hekat:

28 Re-Marken mal 28 Schu-Marken mal 28 Geb-Marken

210 auf 140 auf 84 Kebsenuf-Marken

Die kubische Diagonale des quaderförmigen Hekat misst genau 266 Kebsenuf-Marken, gemäss dem Quadrupel 6-10-15-19 resp. der Gleichung 6x6 + 10x10 + 15x15 = 19x19.

Ein Hekat in der Form eines Quaders wäre also wohl definiert. Wie steht es mit anderen Formen? Schauen wir uns nocheinmal die sonderbare Gleichung von Ahmes an:

1 Hekat mal 3 '7 mal '7 von 22 = 1 Hekat

Die Zahl 3 '7 (in unserer Schreibweise 3 1/7) und ihr Kehrwert '7 von 22 (in unserer Schreibweise 1/7 von 22 oder 22/7) erinnern an einen berühmten Näherungswert der Kreiszahl π. Ein Hinweis auf ein Hekat in Form eines Hohlzylinders? Ich ersetze das linke Hekat in Ahmes' Gleichung mit einer der obigen Definitionen des Hohlmasses:

210 KM x 140 KM x 84 KM x 3 '7 x '7 x 22 = 1 Hekat

Anschliessend transformiere ich die lange Gleichung:

'4 x 105 KM x 105 KM x 3 '7 x '11 x 3136 KM = 1 hekat

Der erste Term

'4 x 105 KM x 105 KM x 3 '7 oder '4 x 7F x 7F x 3 '7

kann als die Fläche eines Kreises vom Durchmesser 7 Fingerbreiten oder '4 Königselle interpretiert werden, während der zweite Term

'11 x 3136 Qm = 19 '165

als Höhe eines Hohlraumes in Form eines Zylinders von der Kapazität eines Hekat gelesen werden kann. So haben wir ein rundes Hekat gefunden:

Innendurchmesser	7 Fingerbreiten	14 Fingerbreiten
Innenumfang	22 Fingerbreiten	44 Fingerbreiten
Innenhöhe	19 Fingerbreiten	19 Fingerbreiten
Fassungsvermögen	1 Hekat	1 Quadrupel-Hekat

Die Fehler sind winzig (viel kleiner als die unvermeidlichen Messfehler).

Bibliographie

Marie E.P. König, Am Anfang der Kultur, Die Zeichensprache des frühen Menschen, Gebrüder Mann Verlag Berlin 1973, Unsere Vergangenheit ist älter, Höhlenkult Alt-Europas, S. Fischer Verlag Frankfurt am Main 1980

Sylvia Couchoud, Mathématiques Egyptiennes, Recherche sur les connaissances mathématiques de l'Egypte pharaonique, Editions Le Léopard d'Or Paris 1993

Paulus Gerdes, Ethnomathematik, dargestellt am Beispiel der Sona Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg Berlin Oxford 1997

Victor J. Katz, A History of Mathematics, Addison Wesley 1998

Jörg Arndt und Christoph Haenel, Pi - Algorithmen, Computer, Arithmetik, Mit CD-Rom, Zweite überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 2000

Franz Gnaedinger, Erbe der Steinzeit, Von den Anfängen der Mathematik, Zürich 1995 / In The House of Seshat (Volume A:) Symbol, Form and Number in Ancient Egypt, Zurich 2001 (darin unter anderem Interpretationen von 55 Problemen aus dem Papyrus Rhind)

Ferner sei auf die zahlreichen Publikationen der International Study Group on Ethnomathematics ISGEm hingewiesen, der ich seit dem Sommer 2001 angehöre.